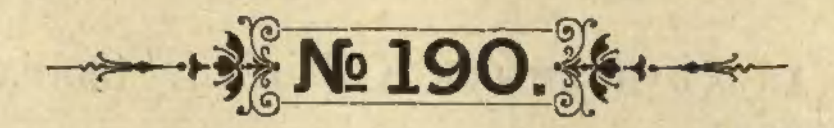
XVI Сем. 25-го апрѣля 1894 г. № 10.

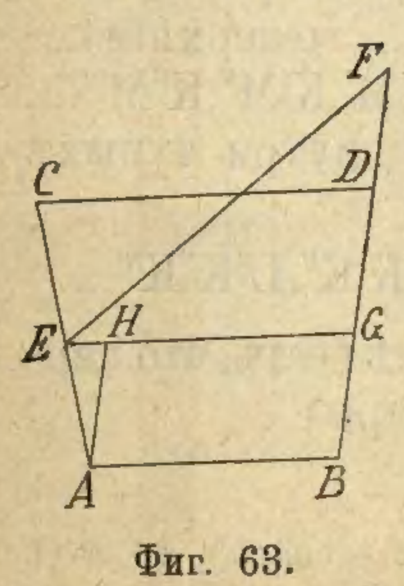
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



ОЧЕРКЪ
геометрической системы Лобачевскаго.

(Продолженіе).*

Сдѣлавъ опредѣленный выборъ по отношенію къ дилеммѣ Евклида, Лобачевскій тѣмъ самымъ рѣшаетъ вопросъ, какъ въ диллеммѣ Лежандра, такъ и въ дилеммѣ Саккери. Сумма угловъ въ треугольникѣ оказывается, конечно, меньше π, — а два угла въ четыреугольникѣ Саккери—острыми. Четыреугольникъ, разсматриваемый Саккери, составляется, какъ мы уже имѣли случай говорить, двумя перпендикулярами AC и BD къ основанію AB (фиг. 63), имѣющими одинаковую длину, и прямыми AB и CD, которыя мы будемъ называть *„нижнимъ основаніемъ“* и *„верхнимъ основаніемъ“*.



Фиг. 63.

Не трудно видѣть, что всякая прямая EF, проходящая между боковыми сторонами этого четыреугольника, больше нижняго основанія. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ EG перпендикулярно къ BD. Если мы теперь построимъ четыреугольникъ Саккери, въ которомъ BG служитъ нижнимъ основаніемъ, а AB боковой стороной, то верхнее основаніе AH, составляя острый уголъ съ AB пройдетъ внутри четыреугольника; поэтому

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188 и 189.

$$EF > EG > HG;\ HG = AB;\ EF > AB.$$

Это замѣчаніе можно, очевидно, формулировать такимъ образомъ: *Если прямая* AB *перпендикулярна къ двумъ прямымъ* AC *и* BD, *то она представляетъ собой кратчайшее разстояніе между ними.*

Больше одного общаго перпендикуляра двѣ прямыя не допускаютъ, ибо изъ этихъ перпендикуляровъ и отрѣзковъ, заключенныхъ между ними, составился бы четыреугольникъ съ четырьмя прямыми углами.

Эти соображенія даютъ намъ возможность представить общую картину взаимнаго расположеніи прямыхъ линій на плоскости Лобачевскаго *).

На одной изъ двухъ прямыхъ KK''' и LL''' (фиг. 64) откладываемъ рядъ равныхъ отрѣзковъ

$$\ldots\ldots KK' = K'K'' = K''K''' = \ldots\ldots$$

Изъ точекъ ..... K, K', K'', K'''.... опускаемъ перпендикуляры ... KL, $K'L', K''L'', K'''L'''$... на LL'''.

Не трудно видѣть, что углы наклоненія.... $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$... составляютъ убывающій рядъ. Въ самомъ дѣлѣ: въ четырехугольникѣ $KLL'K'$ сумма угловъ меньше 2π, поэтому

$$\angle LKK' + \angle KK'L' < \pi;\ \angle LKK' + \angle OKL = \pi.$$

Слѣдовательно

$$\angle KK'L' < \angle OKL \text{ т. е. } \alpha' \angle \alpha.$$

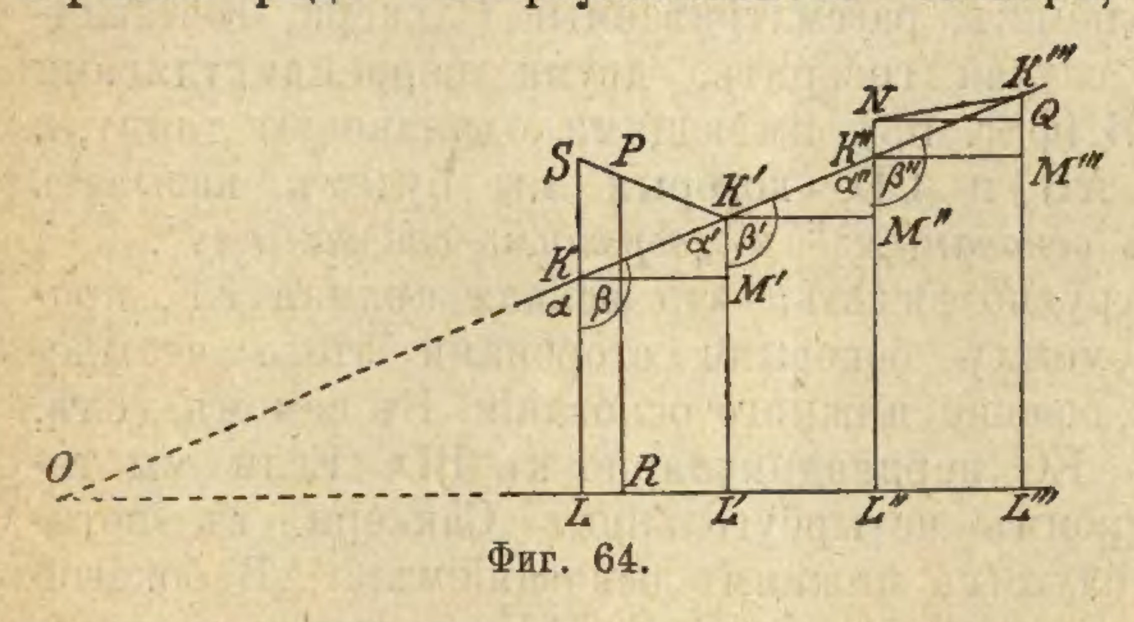
Очевидно, что углы ...$\beta, \beta', \beta'', \beta'''$..., равные ...$\pi-\alpha, \pi-\alpha', \pi-\alpha'', \pi-\alpha'''$..., составляютъ, наоборотъ, возрастающій рядъ.

Если прямыя $K'''K$ и $L'''L$ параллельны, то углы α (какъ углы параллельности) остаются острыми; при этомъ уголъ параллельности возрастаетъ въ сторону параллелизма и убываетъ въ противоположную сторону.

Предположимъ теперь, что линіи KK''' и LL''' не параллельны, но уголъ α, а слѣдовательно, и всѣ дальнѣйшіе углы острые. Если мы построимъ рядъ четыреугольниковъ Саккери, для которыхъ нижними основаніями служатъ отрѣзки $LL', L'L'', L''L'''$... а боковыя стороны равны KL, $K'L', K''L''$..., то верхнія основанія $KM', K'M'', K''M'''$.... пройдутъ внутри тупыхъ угловъ

$$LKK', L'K'K'', L''K''K''' \ldots.$$

Отсюда слѣдуетъ, что перпендикуляры



Фиг. 64.

*) Когда говорятъ о „плоскости“ или о „пространствѣ Лобачевскаго“, то подъ этимъ разумѣютъ плоскость и пространство, обладающія тѣми свойствами, которыя выражены въ постулатахъ Лобачевскаго.

KL,K′L′,K″L″... возрастаютъ и отрѣзки K′M′,K″M″,K‴M‴... представляютъ собой нараценія перпендикуляровъ. Обнаружимъ, что эти наращенія, въ свою очередь, представляютъ собой возрастающій рядъ. Для этого продолжимъ, скажемъ, прямую K″L″ на разстояніе K″N, равное M″K″, и соединимъ N съ K‴. Треугольники K′K″M″ и K″NK‴ равны. [K′K″ = K″K‴ и M″K″=K″N]. Отсюда заключаемъ, что уголъ K″NK‴, равный углу K″M″K′, тупой; тупой потому, что $\angle$ K″M″K′ дополняетъ до π острый уголъ K′M″L″, прилежащій верхнему основанію четыреугольника Саккери. Поэтому, если построимъ четыреугольникъ Саккери, съ нижнимъ основаніемъ L″L‴ и боковой стороной L″N, то верхнее основаніе NQ пройдетъ внутри тупого угла K″NK‴. Тогда имѣемъ:

$$L''N = L'''Q;\ L''K'' = L'''M''';\ M'''Q = NK'' = M''K''$$

$$M'''K''' > M'''Q;\ M'''Q = M''K'';\ M'''K''' > M''K''.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что перпендикуляры растутъ быстрѣе разстояній точекъ K′,K″,K‴..... отъ K. Мы хотимъ этимъ сказать слѣдующее: если разстояніе K‴K въ три раза больше разстоянія K′K, то разность перпендикуляровъ K‴L‴ и KL, равная K′M′ + K″M″ + K‴M‴, превышаетъ K′M′ болѣе, нежели въ три раза. Такъ какъ разстоянія точекъ K′,K″,K‴.... отъ K, согласно второму постулату Евклида, возрастаютъ выше всякой данной величины, то и перпрндикуляры растутъ безгранично.

Все это разсужденіе существенно основано на предположеніи, что уголъ α острый. Это предположеніе оправдывается, если наши прямыя пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ O. Поэтому двѣ пересѣкающіяся прямыя расходятся безпредѣльно въ обѣ стороны въ томъ смыслѣ, что разстояніе между ними растетъ выше всякихъ границъ, когда мы безконечно удаляемся отъ вершины по одной изъ нихъ.

Наоборотъ, отрѣзки LL′,L′L″,L″L‴.... при $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ составляютъ убывающій рядъ. Въ самомъ дѣлѣ, повернемъ четыреугольникъ K″L″L′K′ вокругъ K′L′ на 180°. Прямая K′K″ пойдетъ при этомъ по нѣкоторой прямой PK′. Еслибы случилось, что эта прямая не пересѣчетъ KL, то точка K″ упадетъ въ точку P между перпендикулярами KL и K′L′; поэтому точка L″ упадетъ въ точку R между L и L′; слѣдовательно,

$$L'L'' = RL' < LL'.$$

Допустимъ теперь, что прямая PK′ пересѣчетъ KL въ точкѣ S. Тогда имѣемъ:

$$\angle KSK' + \angle SK'L' < \pi,$$

ибо сумма угловъ въ четыреугольникѣ LSK′L′ меньше 2π. Съ другой стороны, $\angle SK'L' = \beta'$, такъ что

$$\angle KSK' + \beta' < \pi;\ \alpha' + \beta' = \pi;$$

слѣдовательно

$$\angle KSK' < \alpha' < \alpha \text{ или } \angle KSK' < \angle SKK'.$$

Въ виду этого имѣемъ:

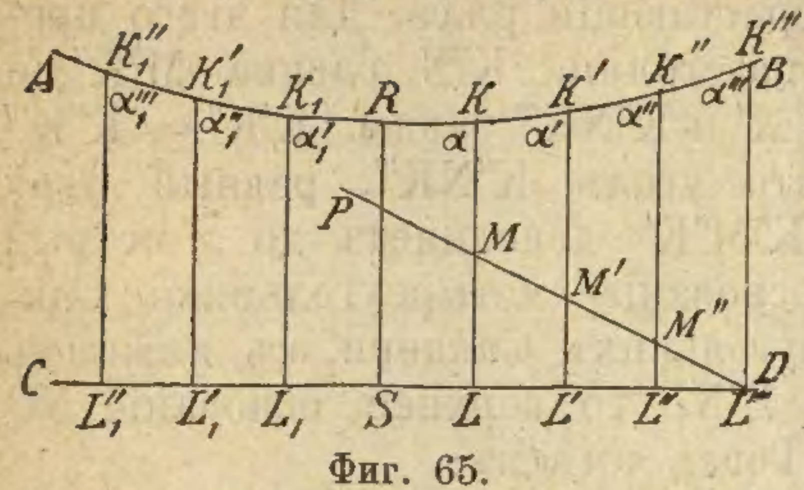
$$SK' > KK';\ KK' = K'K'';\ SK' > K'K''.$$

Точка K″ и въ этомъ случаѣ падаетъ въ точку P между перпендикулярами KL и K′L′, такъ что L′L″ оказывается во всякомъ случаѣ меньше LL′*).

---

*) Вторая половина доказательства приближается къ доказательству Лобачевскаго.

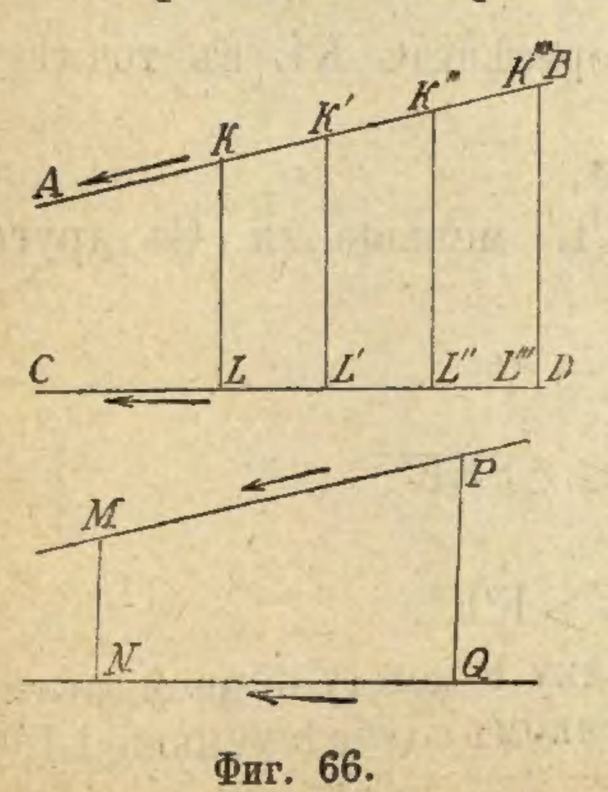
Допустимъ теперь, что прямыя AB и CD (фиг. 65) не пересѣкаются, не будучи параллельными. Тогда углы α не могутъ постоянно оставаться острыми при движенiи отъ B къ A. Въ самомъ дѣлѣ, при этихъ условiяхъ разстоянiя точекъ этой прямой отъ CD постоянно уменьшались бы и, слѣдовательно, оставались бы постоянно меньше, скажемъ, $K'''L'''$. Между тѣмъ легко обнаружить, что это невозможно. Проведемъ для этого черезъ точку L''' прямую $L'''P$ параллельно BA.



Фиг. 65.

Такъ какъ прямая $L'''C$ не пересѣкаетъ BA и не параллельна ей, то она принадлежитъ пучку прямыхъ, не встрѣчающихъ BA; поэтому параллель $L'''P$ пройдетъ между двумя данными прямыми. При сдѣланномъ допущенiи относительно угловъ α отрѣзки $L'''L''$, $L''L'$, $L'L$.... возрастаютъ въ направленiи отъ D къ C. Слѣдовательно разстоянiя точекъ L отъ точки L''' могутъ быть сдѣланы болѣе всякой данной величины. Такъ какъ разстоянiя ML''' больше разстоянiй LL''', то они a fortiori растутъ безгранично. Но при безпредѣльномъ удаленiи отъ вершины по одной сторонѣ угла, разстоянiя ея точекъ отъ другой растутъ безпредѣльно. Перпендикуляры ML становятся, слѣдовательно, больше всякой данной величины; но невозможность этого становится очевидной, если принять во вниманiе, что перпендикуляры KL остаются конечными. Поэтому уголъ α при передвиженiи отъ B къ A не можетъ постоянно оставаться острымъ и, слѣдовательно, въ нѣкоторой точкѣ R сдѣлается прямымъ. Вслѣдъ за симъ острые углы окажутся съ другой стороны перпендикуляровъ K_1L_1, $K'_1L'_1$, $K''_1L''_1$.... и послѣднiе будутъ безгранично возрастать. Прямая RS, перпендикулярная къ обѣимъ прямымъ, представлять собой, какъ намъ уже извѣстно, кратчайшее разстоянiе между ними. Итакъ, если двѣ прямыя не пересѣкаются, не будучи параллельными, то онѣ имѣютъ кратчайшее разстоянiе, опредѣляемое общимъ перпендикуляромъ,—и отъ него расходятся безпредѣльно въ обѣ стороны. Поэтому такiя прямыя называютъ обыкновенно *расходящимися*. Мы уже видѣли, что болѣе одного общаго перпендикуляра двѣ прямыя имѣть не могутъ.

Обратимся теперь къ параллельнымъ прямымъ. Положимъ, что BA параллельна DC (фиг. 66). Тогда, какъ мы уже говорили, уголъ α не можетъ сдѣлаться прямымъ. Параллельныя линiи будутъ при этомъ сближаться въ сторону параллелизма и расходиться въ противоположную сторону. На основанiи изложенныхъ соображенiй, мы въ правѣ заключить, что въ направленiи AB разстоянiе между прямыми возрастаетъ безпредѣльно. Обнаружимъ теперь, что въ противоположномъ направленiи разстоянiе между ними становится сколь угодно малымъ (ω). Возставимъ для этого изъ произвольной точки N прямой NQ перпендикуляръ, на которомъ отложимъ отрѣзокъ NM, равный ω.



Фиг. 66.

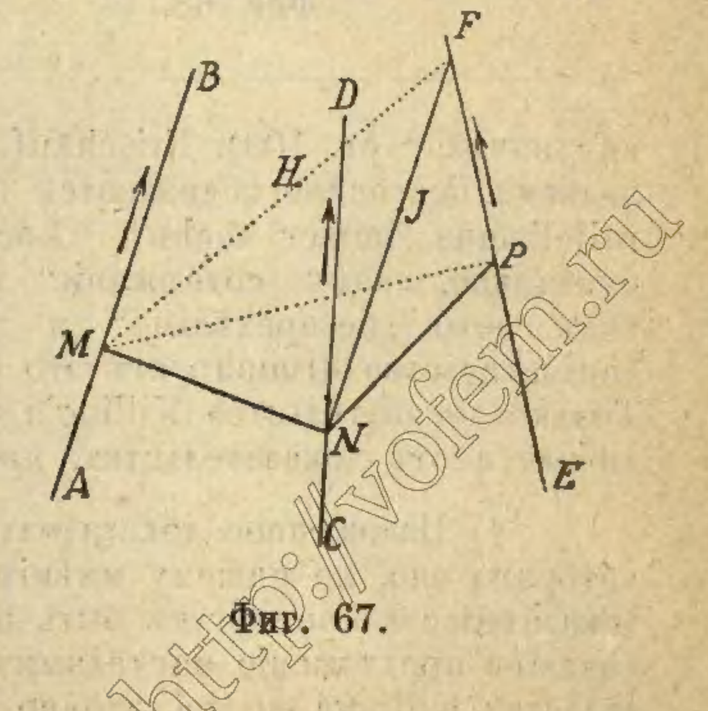
Черезъ точку M проведемъ прямую PM параллельно QN. Такъ какъ

разстояніе между параллелями возрастаетъ неопредѣленно въ сторону MP, то на этой прямой найдется точка P, разстояніе которой PQ отъ NQ равно, скажемъ, K′L′. Перенесемъ теперь четыреугольникъ NMPQ такимъ образомъ, чтобы точка Q упала въ точку L′, а прямая QN пошла бы по L′C. Тогда точка P упадетъ въ точку K′, и прямая PM пойдетъ по параллели K′A. Слѣдовательно, точка M упадетъ въ нѣкоторую точку прямой BA, находящуюся на разстояніи ω отъ DC.*)

Такимъ образомъ, двѣ прямыя въ плоскости Лобачевскаго либо пересѣкаются,—и тогда онѣ расходятся безпредѣльно въ обѣ стороны; либо имѣютъ кратчайшее разстояніе, опредѣляемое общимъ перпендикуляромъ, отъ котораго онѣ также безпредѣльно расходятся въ обѣ стороны; либо онѣ приближаются другъ къ другу асимптотически съ одной стороны и безконечно удаляются другъ отъ друга—съ другой стороны. Такова общая картина взаимнаго расположенія прямыхъ на плоскости Лобачевскаго. Оставимъ теперь плоскость и обратимся къ пространству трехъ измѣреній.

Если намъ дана прямая въ пространствѣ, и мы желаемъ провести чрезъ внѣшнюю точку прямую, параллельную данной въ томъ или другомъ направленіи,—то для этого, по самому опредѣленію параллельности, необходимо провести плоскость черезъ прямую и точку, а затѣмъ сдѣлать соотвѣтствующее плоское построеніе. Поэтому чрезъ каждую точку въ пространствѣ проходитъ только одна прямая, параллельная данной, если ей, согласно нашему условію, приписано опредѣленное направленіе въ ту или другую сторону.

При этомъ, если намъ даны двѣ параллельныя прямыя, то черезъ любую точку пространства можно провести прямую, параллельную обѣимъ. Для этого достаточно черезъ эту точку провести двѣ плоскости, заключающія одну и другую прямую. Своимъ пересѣченіемъ онѣ опредѣлятъ требуемую прямую. Положимъ, что CD || EF (фиг. 67) и прямая AB получена указаннымъ способомъ. Опустимъ изъ произвольной точки M этой прямой перпендикуляръ MP на EF и обнаружимъ, что всякая прямая MH, проходящая въ той же плоскости черезъ точку M внутри угла BMP, пересѣкаетъ EF. Произвольную точку N прямой CD мы соединимъ для этого съ точками M и P, а затѣмъ проведемъ плоскость HMN. Она пересѣчетъ плоскость двухъ параллелей по прямой NJ, проходящей внутри угла DNP. Эта послѣдняя, будучи расположена между прямой NP, встрѣчающей EF, и другой прямой, параллельной ей, принадлежитъ, очевидно, пучку прямыхъ, встрѣчающихъ EF. Точка встрѣчи F, лежитъ въ пересѣченіи трехъ плоскостей JNPF, HMNJ, HMPF; слѣдовательно, она лежитъ на линіи MH, служащей пересѣченіемъ двухъ послѣднихъ плоскостей.



Фиг. 67.

---

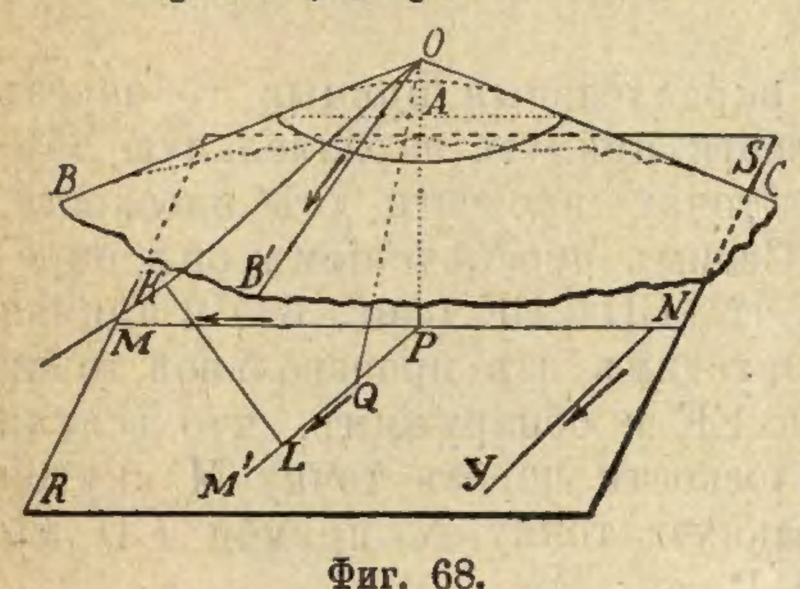
*) Замѣчательно, что это предложеніе почти нигдѣ не доказано съ надлежащей строгостью. Доказательство Лобачевскаго не можетъ считаться достаточнымъ (см. „Но-

Съ другой стороны, прямая AB сама не можетъ встрѣтить EF, ибо въ точкѣ ихъ пересѣченія неизбѣжно сходились бы всѣ три прямыя AB, CD и EF; а это невозможно, такъ какъ двѣ послѣднія параллельны. Такимъ образомъ прямая AB отдѣляетъ въ точкѣ M прямыя, проходящія въ плоскости прямой EF и пересѣкающія ее, отъ непересѣкающихъ. Она, слѣдовательно, параллельна EF. Точно такимъ же образомъ мы обнаружимъ, что AB параллельна CD. Предложеніе такимъ образомъ доказано. Не трудно видѣть, что эту теорему можно перефразировать такимъ образомъ:

Двѣ прямыя, параллельныя третьей, параллельны между собой и въ томъ случаѣ, когда три прямыя не лежатъ въ одной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что AB и CD параллельны EF. Черезъ произвольную точку. прямой AB проведемъ плоскости, проходящія черезъ прямыя CD и EF. Пересѣченіе этихъ плоскостей представляетъ собой прямую, параллельную обѣимъ прямымъ; слѣдовательно, она совпадетъ съ прямой AB, параллельной EF, и будетъ параллельна CD, какъ этого требуетъ доказываемое предложеніе *).

Представимъ себѣ теперь прямую PM (фиг. 68) и параллельную ей прямую OB, при этомъ $OP \perp PM$. Представимъ себѣ, что плоскость, опредѣляемая двумя параллелями, вращается вокругъ OP. Тогда прямая MP опишетъ плоскость RS, а прямая OB коническую поверхность, каждая образующая которой OB′ параллельна своей проэкціи PM′ на эту плоскость.

Прямая, параллельная своей проэкціи на плоскость, называется *параллельной плоскости*. При этомъ говорятъ, что она параллельна плоскости въ томъ же направленіи, въ какомъ она параллельна своей проэкціи. Коническая поверхность, на которой лежатъ всѣ прямыя, проходящія черезъ данную точку O параллельно плоскости, называется *конусомъ параллелей*. Не трудно видѣть, что прямая OB′. параллельная какой нибудь прямой NY на плоскости RS, параллельна этой плоскости. Въ



Фиг. 68.

выя начала“ ст. 109). Frischauf доказываетъ только, что паралелли въ сторону параллелизма постоянно сближаются („Parallele nähern sich einander auf der Seite ihres Parallelismus immer mehr“. Loc. cit § 14). Проф. Ващенко-Захарченко, переводя буквально, какъ содержаніе теоремы, такъ и ея доказательство, однако прибавилъ слово „безпредѣльно“ и этимъ приводитъ читателя въ недоумѣніе, такъ какъ доказательство игнорируетъ это слово. („Начала Евклида“. Введеніе. Предложеніе 10). Только доказательство Killing'а (Loc. cit. § 10. d) безупречно. По идеѣ оно мало отличается отъ доказательства, предложеннаго нами въ текстѣ.

*) Изложенное доказательство приближается къ доказательству Лобачевскаго, у котораго оно, по нашему мнѣнію, безъ нужды усложнено. Остальныя извѣстныя намъ доказательства не могутъ быть признаны удовлетворительными. Разсужденія Frischauf'а дѣлаютъ предложеніе нагляднымъ, -- но не доказываютъ его. (Loc. cit. § 9). Доказательство Killinga не достаточно строго, ибо предполагаетъ пересѣченіе прямыхъ, которос ничѣмъ не оправдано [Loc. cit. § 11 h), i), k). Мы говоримъ о пересѣченіи прямыхъ FG и MN].

самомъ дѣлѣ, проэкція PM′ прямой OB′ на ту же плоскость служитъ пересѣченіемъ двухъ плоскостей, заключающихъ параллели OB′ и NY. Слѣдовательно, она параллельна обѣимъ. Иными словами прямая OB′ оказывается параллельной своей проэкціи на плоскость.

Разстоянія точекъ прямой OB′ отъ плоскости опредѣляются разстояніями тѣхъ же точекъ отъ проэкціи PM′. Поэтому прямая параллельная плоскости неопредѣленно къ ней приближается съ одной стороны и безпредѣльно отъ нея удаляется съ другой стороны.

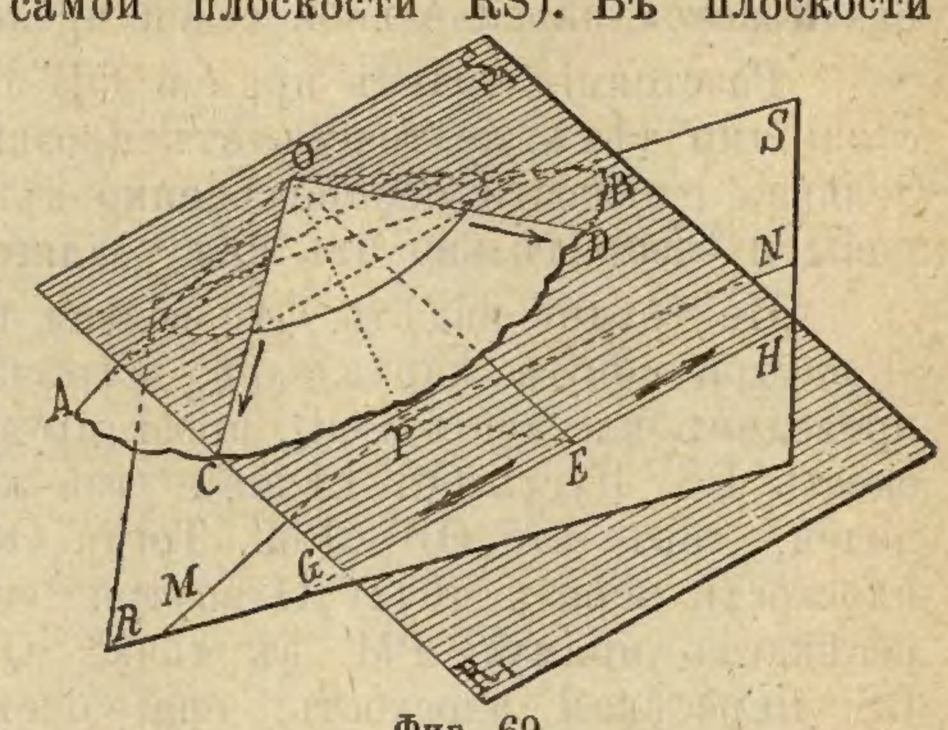
Не трудно видѣть, что всякая прямая, проходящая черезъ точку O внутри конуса параллелей, встрѣчаетъ плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ плоскость POQ, проэктирующую данную прямую OQ на плоскость RS. Пусть OB′ сѣченіе той-же плоскости съ конусомъ параллелей, такъ что OB′ || PM′. Тогда OQ проходитъ въ проэктирующей плоскости черезъ точку O внутри угла параллельности и поэтому пересѣкаетъ прямую PM′ въ точкѣ Q, а вмѣстѣ съ тѣмъ и плоскость RS. Пересѣкая плоскость, она, очевидно, удаляется отъ нея безпредѣльно. Уголъ, который прямая OQ при этомъ образуетъ съ прямыми, проходящимъ въ плоскости черезъ ея основаніе, достигаетъ въ проэктирующей плоскости minimum'a съ одной стороны и maximum'a—съ другой стороны; при этомъ онъ непрерывно возрастаетъ по направленію отъ minimum'a къ maximum'y. Мы не станемъ этого доказывать, ибо обыкновенное доказательство этого предложенія не зависитъ отъ постулата Евклида.

Положимъ теперь, что прямая OK лежитъ внѣ конуса параллелей и PM′ служитъ ея проэкціей на плоскость. При такихъ условіяхъ прямая OK не встрѣчаетъ плоскости RS: въ самомъ дѣлѣ, точка встрѣчи должна лежать на прямой PM′; но прямая OK не можетъ встѣтить PM′, будучи расположена въ проэктирующей плоскости внѣ угла параллельности. Въ этомъ случаѣ мы можемъ построить прямую KL перпендикулярную, какъ къ OK, такъ и къ PM′. Прямая KL, будучи перпендикулярна къ общему пересѣченію двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, перпендикулярна къ плоскости RS. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ можно провести прямую, перпендикулярную къ данной прямой и къ данной плоскости. Она опредѣляетъ собой кратчайшее разстояніе между ними.

Итакъ въ пространствѣ Лобачевскаго прямая можетъ встрѣчать плоскость, и тогда она безпредѣльно удаляется отъ нея съ одной и съ другой стороны. Прямая можетъ быть параллельна плоскости; тогда она асимптотически къ ней приближается съ одной стороны и безконечно отъ нея удаляется—съ другой стороны. Наконецъ, прямая можетъ не встрѣчать плоскости, не будучи ей параллельна. При этомъ она безконечно удаляется отъ нея въ обѣ стороны отъ общаго перпендикуляра, опредѣляющаго собой кратчайшее разстояніе между ними.

Займемся теперь изслѣдованіемъ взаимнаго расположенія плоскостей. Положимъ, что плоскость R′S′ (фиг. 69) проходитъ черезъ точку O и пересѣкаетъ конусъ параллелей къ плоскости RS по двумъ образующимъ OC и OD. Такимъ образомъ въ этой плоскости чрезъ точку O проходятъ двѣ прямыя, параллельныя двумъ прямымъ на плоскости RS, а слѣдовательно, и самой плоскости. Ясное дѣло, что черезъ каж-

дую точку O′ одной плоскости можно въ этомъ случаѣ провести двѣ прямыя, параллельныя другой плоскости. (Для этого достаточно провести O′C′||OC и O′D′||OD. Эти прямыя будутъ параллельны проэкціямъ OM и ON, а потому и самой плоскости RS). Въ плоскости R′S′ проведемъ биссекторъ OE угла COD. Будучи расположенъ внутри конуса параллелей, онъ встрѣтитъ плоскость RS въ нѣкоторой точкѣ E. Слѣдовательно, двѣ плоскости пересѣкутся по нѣкоторой прямой GH. Такъ какъ она представляетъ собой пересѣченіе плоскостей, проходящихъ чрезъ двѣ параллели OC и PM, то она параллельна имъ въ направленіи HG; и, наоборотъ, она параллельна OD и PN въ противоположномъ направленіи. Прямая OE будетъ при такихъ условіяхъ перпендикулярна къ GH. Итакъ, если чрезъ каждую точку одной плоскости проходятъ двѣ прямыя, параллельныя другой, то плоскости пересѣкаются по прямой, параллельной этимъ двумъ системамъ прямыхъ.



Фиг. 69.

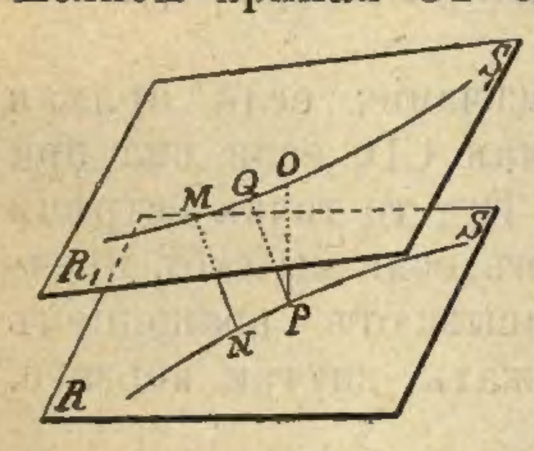
Предположимъ теперь что плоскость R′S′ касается конуса параллелей вдоль образующей OC. Въ этомъ случаѣ чрезъ каждую точку плоскости R′S′ проходитъ одна и только одна прямая параллельная плоскости RS. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы черезъ какую нибудь точку O′ походили двѣ прямыя параллельныя плоскости RS, то мы могли бы провести чрезъ точку O въ той же плоскости R′S′ двѣ прямыя, имъ параллельныя; онѣ были бы параллельны плоскости RS и потому лежали бы на конусѣ параллелей. Плоскость R′S′ пересѣкала бы коническую поверхность по двумъ образующимъ, тогда какъ она, согласно условію, касается ея. При такихъ условіяхъ, плоскости не могутъ пересѣчься. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ плоскость RS лежитъ цѣликомъ съ внутренней стороны конуса параллелей, то для пересѣченія съ ней плоскость R′S′ неизбѣжно должна была бы войти внутрь конуса. Если чрезъ каждую точку одной плоскости проходитъ одна и только одна прямая, параллельная другой плоскости, то эти плоскости называются *параллельными въ направленіи, опредѣляемомъ этими прямыми*. Двѣ параллельныя плоскости, не пересѣкаются, но асимптотически приближаются другъ къ другу вдоль по параллельнымъ прямымъ.

Такъ какъ чрезъ данную образующую можно провести только одну плоскость, касающуюся данной конической поверхности,—то отсюда вытекаетъ слѣдующій чрезвычайно важный фактъ: *черезъ данную прямую, параллельную плоскости, всегда можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной.*

Это положеніе можно еще формулировать слѣдующимъ образомъ: черезъ данную прямую параллельную плоскости RS, можно провести только одну плоскость R′S′, не встрѣчающую данной. Въ самомъ дѣлѣ, плоскость R′S′ будетъ заключать, очевидно, только одну систему прямыхъ параллельныхъ плоскости RS, ибо въ противномъ случаю, еслибъ

такихъ системъ было двѣ, то плоскости пересѣкались бы. Слѣдовательно, плоскость R′S′ параллельна RS, и наше положеніе приводится къ предыдущему.

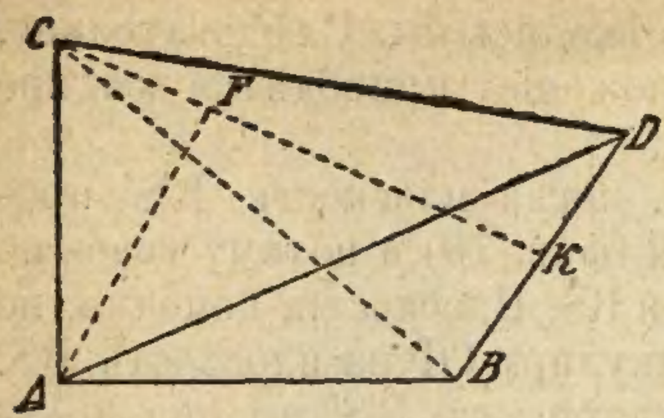
Обратимся, наконецъ, къ тому случаю, когда плоскость R′S′ проходитъ чрезъ точку O внѣ конуса параллелей (фиг. 70) и потому вовсе не заключаетъ прямыхъ параллельныхъ плоскости RS. Плоскости, конечно, не пересѣкутся. Изъ точки O опустимъ перпендикуляръ OP на плоскость RS. Еслибы прямая OP была также перпендикулярна къ R′S′, то она представляла бы собой общій перпендикуляръ. Въ противномъ случаѣ, опустимъ изъ P перпендикуляръ PQ на R′S′. Чрезъ прямыя OP и PQ проведемъ плоскость, которая будетъ перпендикулярна къ обѣимъ плоскостямъ, ибо проходитъ чрезъ перпендикулярныя къ нимъ прямыя. Она пересѣчетъ плоскости по двумъ расходящимся прямымъ: въ самомъ дѣлѣ, эти прямыя не могутъ пересѣкаться, ибо общая точка принадлежала бы обѣимъ плоскостямъ; онѣ не могутъ быть также параллельны, ибо наши плоскости, согласно условію, не заключаютъ параллельныхъ прямыхъ. Прямая MN, перпендикулярная къ обѣимъ прямымъ, будетъ также общимъ перпендикуляромъ къ обѣимъ плоскостямъ (ибо она перпендикулярна къ общему пересѣченію двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей). Изъ того, что прямая MO и NP расходятся, слѣдуетъ, что MN < OP. Иными словами общій перпендикуляръ представляетъ собой кратчайшее разстояніе между плоскостями.



Фиг. 70.

Итакъ двѣ плоскости въ пространствѣ Лобачевскаго могутъ заключать двѣ системы взаимно параллельныхъ прямыхъ; тогда онѣ пересѣкаются по прямой, принадлежащей въ одномъ направленіи одной системѣ, въ другомъ направленіи другой системѣ. Эта прямая уходитъ въ безконечность, когда обѣ системы совпадаютъ въ одну; въ этомъ случаѣ плоскости приближаются другъ къ другу асимптотически вдоль по прямымъ этой системы. Наконецъ, двѣ плоскости могутъ вовсе не заключать соотвѣтственно параллельныхъ прямыхъ; тогда онѣ имѣютъ кратчайшее разстояніе, опредѣляемое общимъ перпендикуляромъ, отъ котораго онѣ безконечно расходятся во всѣ стороны.

Намъ остается изслѣдовать относительное положеніе двухъ прямыхъ, не лежащихъ въ одной плоскости. Переходя къ этому вопросу, мы прежде всего обнаружимъ, что четыреугольникъ Саккери сохраняетъ свои свойства и въ томъ случаѣ, когда его боковыя стороны не лежатъ въ одной плоскости. Мы хотимъ этимъ сказать слѣдующее: Если изъ конечныхъ точекъ A и B отрѣзка AB (фиг. 71) мы возставимъ два перпендикуляра одинаковой длины AC и BD, не лежащіе въ одной плоскости, и соединимъ ихъ вершины прямой CD, то получимъ четыреугольникъ ABDC, обладающій всѣми свойствами четыреугольника Саккери, т. е. углы при верхнемъ основаніи CD равны; они острые; общій перпендикуляръ представляетъ собой кратчайшее разстояніе между прямыми. Въ самомъ дѣлѣ, прямоугольные треугольники ABC и ABD равны по двумъ катетамъ, а потому равны діагонали AD и BC. Отсюда вытекаетъ равенство треугольниковъ ACD и CDB, а вмѣстѣ съ тѣмъ и угловъ того же обозначенія. Въ трегранномъ углѣ, вершина котораго находится въ точкѣ C, сумма двухъ плоскихъ угловъ больше третьяго:



Фиг. 71.

$$\angle ACB + \angle BCD > \angle ACD,$$

и по той же причинѣ

$$\angle ABC + \angle CBD > \angle ABD.$$

Слѣдовательно, сумма угловъ четыреугольника ABDC меньше суммы угловъ двухъ треугольниковъ ACB и DCB, т. е. меньше 2π. Поэтому углы ACD и CDB при верхнемъ основаніи острые.

Присоединимъ къ этому еще слѣдующее замѣчаніе: если прямая CK образуетъ съ AC меньшій уголъ, нежели прямая CD; если она при этомъ пересѣкаетъ прямую BD со стороны точки D;—то точка встрѣчи K лежитъ между B и D. Это становится очевиднымъ, если мы себѣ представимъ конусы, которые прямыя CD и CK описываютъ вращеніемъ вокругъ AC. Второй конусъ будетъ цѣликомъ лежать внутри перваго, а потому пересѣчетъ прямую BD между B и D.

Читатель, вѣроятно, замѣтилъ, что всѣ положенія, доказательство которыхъ опирается на свойствахъ четыреугольника Саккери, основываются на *этихъ* положеніяхъ и не зависятъ отъ того, лежатъ ли прямыя въ одной плоскости или въ различныхъ плоскостяхъ. Мы однако доведемъ изслѣдованіе до конца во избѣжаніе всякихъ недоразумѣній.

Опустимъ изъ C перпендикуляръ CK на BD (фиг. 71). Если мы теперь построимъ четыреугольникъ Саккери, имѣющій BK нижнимъ основаніемъ и AB боковой стороной,—то верхнее основаніе AF, составляя острый уголъ съ AB, здѣсь, какъ и въ случаѣ плоскаго четыреугольника, встрѣтитъ CK въ точкѣ, F лежащей между C и K. Слѣдовательно, прямая $AB < CK$ и представляетъ собой кратчайшее разстояніе между прямыми.

Обратимся теперь къ двумъ прямымъ (фиг. 72) KK_1 и LL_1, расположеннымъ въ различныхъ плоскостяхъ. Изъ точекъ K и K′ опустимъ перпендикуляры KL и K′L′ на другую прямую. Положимъ, что $\angle XKL$ острый. Не трудно видѣть, что уголъ XK′L′ также острый: въ самомъ дѣлѣ, изъ четыреугольника KLL′K′ имѣемъ:

$$\angle LKK' + \angle KK'L' < \pi.$$

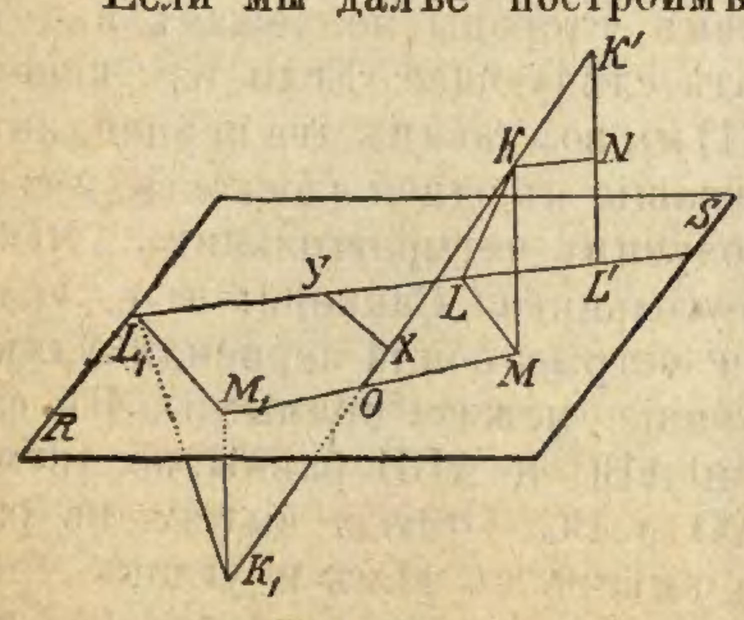
Съ другой стороны

$$\angle LKK' + \angle XKL = \pi.$$

Откуда

$$\angle KK'L' < \angle XKL.$$

Если мы далѣе построимъ четыреугольникъ Саккери, имѣющій LL′ своимъ нижнимъ основаніемъ и KL боковой стороной,—то верхнее основаніе KN, образуя острый уголъ съ прямой KL, пересѣчетъ K′L′ въ точкѣ N, лежащей между K′ и L′. Поэтому $K'L' > KL$. Черезъ произвольную точку O прямой KK_1 и прямую LL_1 проведемъ плоскость RS. Очевидно, что разстоянія KL и K_1L_1 точекъ прямой KK_1 отъ прямой LL_1 больше разстоянія KM и K_1M_1 тѣхъ же точекъ отъ плоскости (или, во всякомъ случаѣ, не меньше).



Фиг. 72.

Такъ какъ прямая KK_1 безконечно удаляется отъ плоскости въ обѣ стороны, то она à fortiori удаляется безконечно отъ прямой LL_1, какъ съ одной, такъ и съ другой стороны. Изъ этого слѣдуетъ, что уголъ K_1KL при перемѣщеніи точки K по направленію къ K_1 не можетъ постоянно оставаться острымъ, ибо при такихъ условіяхъ разстояніе KL убывало бы постоянно. Слѣдовательно, въ нѣкоторой точкѣ X этотъ уголъ сдѣлается прямымъ, и общій перпендикуляръ XY опредѣлитъ собой кратчайшее разстояніе между двумя прямыми.

Мы пришли такимъ образомъ къ стройной и цѣльной картинѣ взаимнаго расположенія прямыхъ и плоскостей, исходя изъ положенія, противоположнаго постулату Евклида. Эта стройность, не заключающая въ себѣ никакихъ противорѣчій, сохраняется и далѣе въ метрическихъ соотношеніяхъ неевклидовой геометріи. Лобачевскій считалъ эту цѣльность системы достаточной гарантіей за ея логическую достовѣрность. Мы обсудимъ этотъ вопросъ ниже, когда въ нашемъ распоряженіи будетъ находиться весь геометрическій матеріалъ. Но отказавшись отъ геометріи Евклида, Лобаческій обнаружилъ однако, что опровергнуть ее невозможно. Онъ доказалъ, что она во всякомъ случаѣ представляетъ собой логически законную систему.

Отказавшись отъ геометріи Евклида, Лобачевскій поставилъ ее на незыблимую основу.

Правильнѣе, отказавшись отъ геометріи Евклида въ смыслѣ ея логической необходимости, онъ обнаружилъ ея законность въ смыслѣ формальной системы, логически стройной, не заключающей никакихъ внутреннихъ противорѣчій. Выясненію этой идеи мы посвятимъ слѣдующую главу.

В. Каганъ (Одесса).

(Продолженіе слѣдуетъ).

МНИМАЯ СВѢТЯЩАЯСЯ ТОЧКА

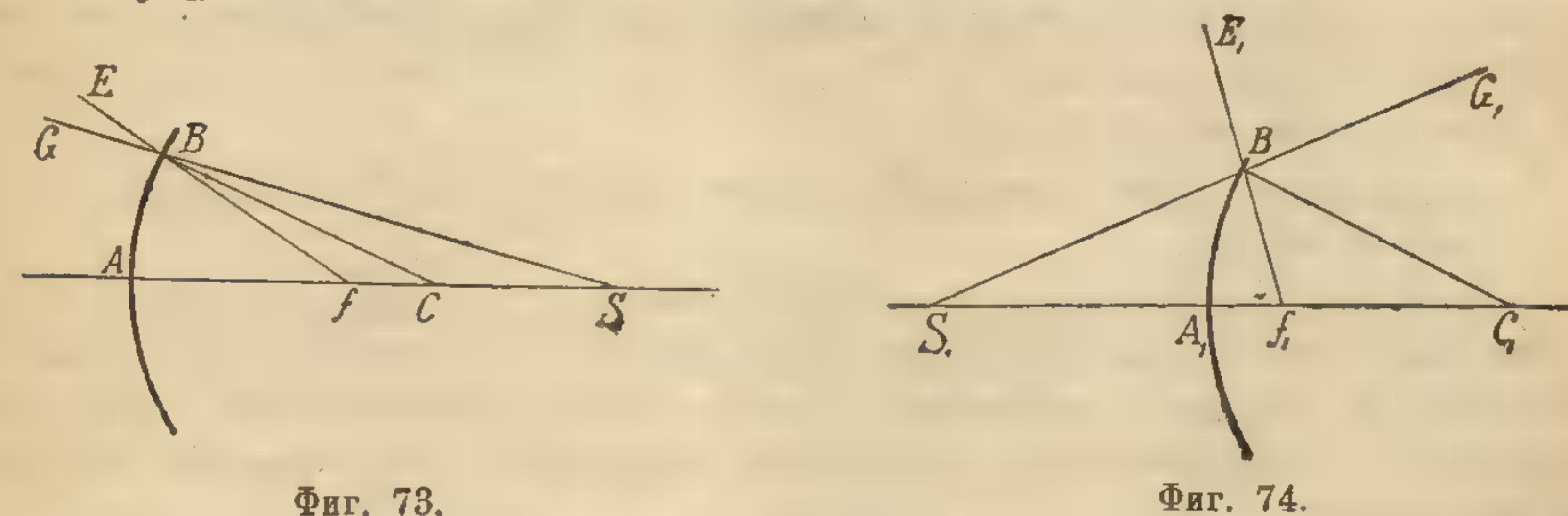
и

приложеніе закона взаимности къ геометрической оптикѣ.

Въ учебникахъ физики въ теоріи сферическихъ стеколъ и зеркалъ разсматривается только случай дѣйствительной свѣтящейся точки, т. е. случай, когда на зеркало или стекло падаетъ пучокъ лучей, расходящихся изъ одной точки. Мнимой свѣтящейся точкой называется точка, лежащая за стекломъ или зеркаломъ, къ которой направляется сходящійся пучокъ лучей, падающихъ на зеркало или стекло. Разсмотрѣніе всѣхъ случаевъ положенія мнимаго предмета (совокупность мнимыхъ свѣтящихся точекъ) за сферическимъ зеркаломъ или стекломъ приводитъ къ закону, аналогичному закону взаимности геометрическихъ формъ: *всякое предложеніе объ изображеніи въ собирающемъ зеркалѣ или стеклѣ можно превратить въ соотвѣтствующее предложеніе объ изобра-*

женіи въ разсѣевающемъ зеркалѣ или стеклѣ, и наоборотъ, если замѣнить слово „дѣйствительный“ словомъ „мнимый“, слово „передъ“ словомъ „за“, и наоборотъ. Основаніе этого закона лежитъ во 1-хъ въ томъ, что всякій чертежъ, который изображаетъ какой нибудь случай отраженія или преломленія свѣта въ собирающемъ зеркалѣ или стеклѣ, служитъ также для изображенія соотвѣтственнаго случая отраженія или преломленія свѣта въ разсѣевающемъ зеркалѣ или стеклѣ, и наоборотъ, если принять за лучи тѣ отрѣзки прямыхъ, которые раньше изображали продолженія лучей, и за продолженія—тѣ отрѣзки, которые раньше изображали самые лучи, и во 2-хъ въ томъ, что всѣ остальныя свойства изображеній, кромѣ дѣйствительности или мнимости: — величина, положеніе относительно стекла или зеркала, расположеніе относительно предмета (прямое или обратное), зависятъ только отъ геометрическихъ свойствъ фигуръ, а эти послѣднія не зависятъ отъ того, изображаютъ-ли данныя прямыя самые лучи, или ихъ продолженія.

Сферическія зеркала. Фигуры 73 и 74 представляютъ случаи изо-



Фиг. 73. Фиг. 74.

браженія точки, лежащей на главной оптической оси, въ вогнутомъ зеркалѣ, или въ выпукломъ, смотря по тому, какія стороны шаровыхъ поверхностей AB и A_1B_1 принять за зеркала. Если правыя стороны представляютъ зеркала то зеркала эти будутъ вогнутыя, отрѣзки BS и Bf, B_1G_1 и B_1f_1, лежащіе вправо, представляютъ самые лучи, а отрѣзки BE и BG, B_1E_1 и B_1S_1, лежащіе влѣво, — продолженія лучей, точки f, S и f_1— дѣйствительныя, точка S_1—мнимая. Если лѣвыя стороны представляютъ зеркала, то зеркала выпуклыя, отрѣзки, лежащіе влѣво, представляютъ самые лучи, вправо — ихъ продолженія, точки f, S, f_1 — мнимыя, точка S_1—дѣйствительная. Но разстоянія точекъ отъ зеркалъ въ обоихъ случаяхъ одинаковы.

Отсюда взаимность слѣдующихъ предложеній:

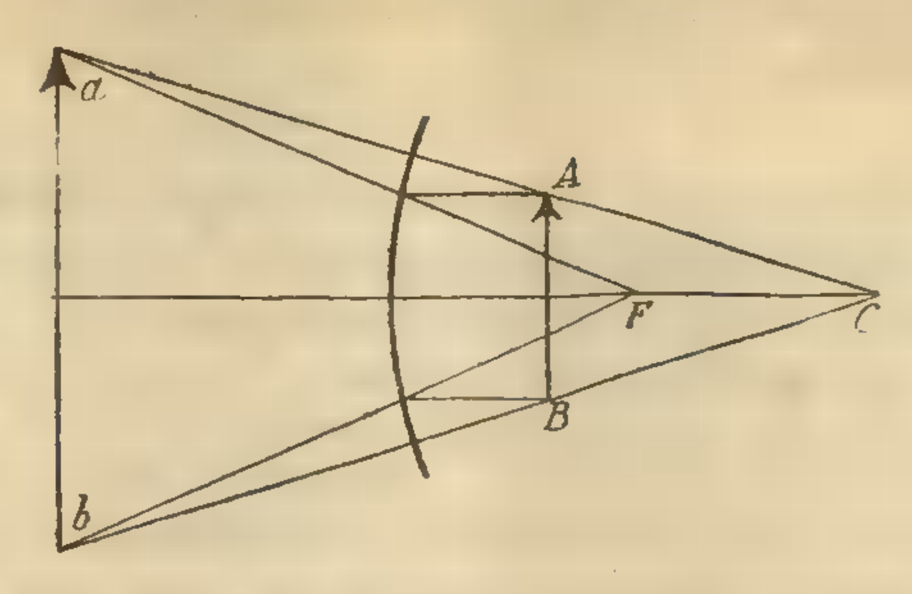
I. Если *дѣйствительная* точка лежитъ *передъ вогнутымъ* зеркаломъ дальше центра, то изображеніе *дѣйствительное*, лежитъ между фокусомъ и центромъ.

Если *мнимая* точка лежитъ *за выпуклымъ* зеркаломъ дальше центра, то изображеніе *мнимое*, лежитъ между фокусомъ и центромъ.

II. Если *дѣйствительная* точка лежитъ *передъ выпуклымъ* зеркаломъ, то изображеніе всегда *мнимое* и лежитъ между фокусомъ и зеркаломъ.

Если *мнимая* точка лежитъ *за вогнутымъ* зеркаломъ, то изображеніе всегда *дѣйствительное* и лежитъ между фокусомъ и зеркаломъ.

Примѣръ изображенія предмета (фиг. 75).



Фиг. 75.

Если *дѣйствительный* предметъ помѣщенъ *передъ вогнутымъ* зеркаломъ между фокусомъ и зеркаломъ, то изображеніе *мнимое*, прямое и увеличенное.

Если *мнимый* предметъ помѣщенъ *за выпуклымъ* зеркаломъ между фокусомъ и зеркаломъ, то изображеніе *дѣйствительное*, прямое и увеличенное.

Сферическія стекла. Сферическія стекла представляютъ то отличіе отъ зеркалъ, что здѣсь свѣтящаяся точка и ея изображеніе, если онѣ обѣ одноименны (обѣ дѣйствительны, или обѣ мнимы), лежатъ по разныя стороны стекла; если же разноименны, то по одну сторону. Та же разница и по отношенію къ отрѣзкамъ прямыхъ, изображающихъ падающіе и преломленные лучи и ихъ продолженія. Мы не приводимъ здѣсь чертежей, такъ какъ каждый найдетъ ихъ въ любомъ учебникѣ физики. Если на чертежахъ, представляющихъ построеніе изображеній въ двояковыпуклыхъ стеклахъ, продолжать по другую сторону стекла всѣ линіи, изображающія лучи, и принять полученные отрѣзки за самые лучи, а тѣ отрѣзки, которые раньше изображали лучи, считать ихъ продолженіями; если вмѣсто двояковыпуклаго стекла вообразить разсѣевающее стекло съ такимъ же фокуснымъ разстояніемъ; тогда полученные чертежи представятъ соотвѣтственные случаи изображенія въ разсѣевающихъ стеклахъ, и мы получимъ слѣдующія три пары взаимныхъ предложеній:

Собирающее стекло.

I. Если *дѣйствительный* предметъ помѣщенъ дальше двойного фокуснаго разстоянія, то изображеніе уменьшенное, обратное, *дѣйствительное*, лежитъ между фокусомъ и двойнымъ фокуснымъ разстояніемъ.

II. Если *дѣйствительный* предметъ лежитъ между фокусомъ и двойнымъ фокуснымъ разстояніемъ, то изображеніе увеличенное, обратное, *дѣйствительное*, лежитъ дальше двойного фокуснаго разстоянія.

Разсѣевающее стекло.

Если *мнимый* предметъ помѣщенъ дальше двойного фокуснаго разстоянія, то изображеніе уменьшенное, обратное, *мнимое*, лежитъ между фокусомъ и двойнымъ фокуснымъ разстояніемъ.

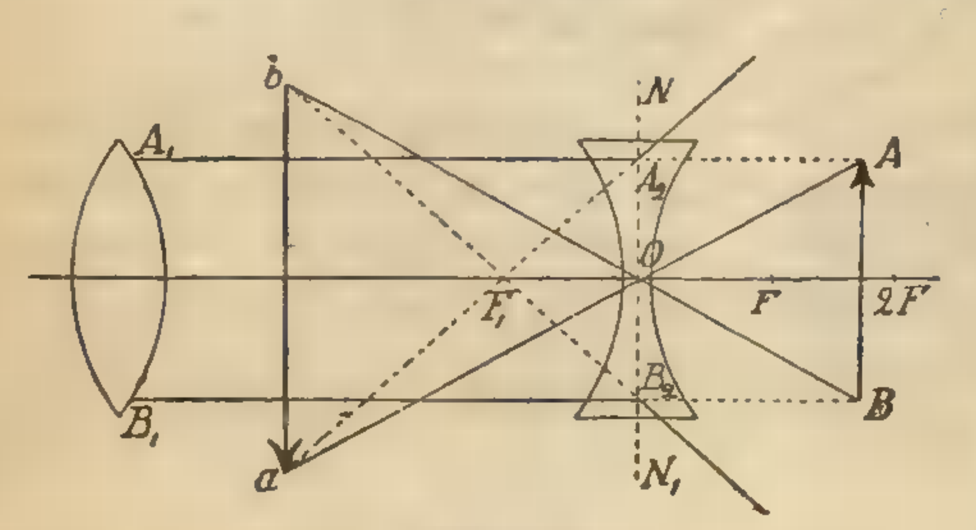
Если *мнимый* предметъ лежитъ между фокусомъ и двойнымъ фокуснымъ разстояніемъ, то изображеніе увеличенное, обратное, *мнимое*, лежитъ дальше двойного фокуснаго разстоянія.

III. Если *дѣйствительный* предметъ помѣщенъ ближе фокуса, то изображеніе—*мнимое*, прямое, увеличенное.

Если *мнимый* предметъ помѣщенъ ближе фокуса, то изображеніе—*дѣйствительное*, прямое, увеличенное.

Галилеева труба. Въ Галилеевой трубѣ изображеніе, даваемое объективомъ, служитъ мнимымъ предметомъ по отношенію къ окуляру. Теорія этого инструмента излагается обыкновенно очень неясно, такъ какъ въ статьѣ о сферическихъ стеклахъ опускается случай мнимаго предмета. Встрѣчаются и ошибочныя описанія. Такъ въ учебникѣ Краевича читаемъ (8-е изд. стр. 480): „Чечевицу B (окуляръ) ставятъ на пути лучей, прежде ихъ пересѣченія, такъ чтобы ея главное фокусное разстояніе было болѣе разстоянія этой чечевицы отъ точки *n*“ (изображеніе, даваемое объективомъ). Другими словами, изображеніе, даваемое объективомъ и служащее мнимымъ предметомъ для окуляра, должно быть между окуляромъ и его фокусомъ. Но изъ предыдущаго видно (случай III), что при такомъ расположеніи изображеніе будетъ дѣйствительное, увеличенное и прямое по отношенію къ 1-му изображенію и обратное по отношенію къ предмету, т. е. совсѣмъ не то, что нужно; если помѣстимъ окуляръ такъ, чтобы 1-е изображеніе лежало за двойнымъ фокуснымъ разстояніемъ его, изображеніе будетъ мнимое, обратное и уменьшенное (случай I). Для того, чтобы изображеніе было мнимое и увеличенное, нужно помѣстить окуляръ такъ, чтобы 1-е изображеніе лежало между его фокусомъ и двойнымъ фокуснымъ разстояніемъ (случай II).

Второе изображеніе строится такимъ образомъ (фиг. 76):



Фиг. 76.

Пусть AB представляетъ изображеніе, даваемое объективомъ. На пути лучей, идущихъ къ AB, ставимъ разсѣевающее стекло такъ, чтобы AB было между его фокусомъ F и двойнымъ фокуснымъ разстояніемъ 2F. Построимъ изображеніе точки A. Проведемъ черезъ точку A побочную оптическую ось AOa и лучъ A_1A_2, который идетъ къ точкѣ A параллельно главной оптической оси. Этотъ лучъ, преломившись въ стеклѣ, пойдетъ такъ, какъ будто бы онъ выходилъ изъ главнаго фокуса F_1, по продолженію линіи F_1A_2. Этотъ лучъ непересѣчетъ побочную ось, такъ какъ въ трапеціи A_2AOF_1, A_2A бо̀льшая изъ параллельныхъ сторонъ и не параллельныя стороны пересѣкутся въ сторонѣ меньшей изъ параллельныхъ, въ точкѣ *a*. Подобнымъ образомъ построимъ изображеніе точки B. Получимъ изображеніе мнимое, увеличенное, обратное по отношенію къ AB и прямое по отношенію къ предмету.

Б. Гернъ (Смоленскъ).

ЗАМѢТКА РЕАЛИСТА

къ программѣ физико-математическихъ педагогическихъ курсовъ въ г. Одессѣ.

Реальная школа, реальное образованіе! Какъ часто слышимъ подобное восклицаніе, какая пропасть между различными истолкованіями этого слова! Одни стараются реальную школу приблизить, поелику возможно, къ типу современной гимназіи, другіе же не прочь дать реальнымъ училищамъ характеръ ремесленной школы.

Въ Россіи реальныя училища—пріятно ли, непріятно ли, а надо это признать—представляютъ собою „второй сортъ" среднеучебныхъ заведеній; въ нѣкоторыхъ иностранныхъ государствахъ можно встрѣтить обратное явленіе. Естественно, что въ зависимости отъ этого взгляда на реальныя училища и на цѣли „реальнаго" образованія установились и различные взгляды на научную подготовку преподавателей. Какъ образецъ оригинальнаго взгляда, взгляда, діаметрально противоположнаго воззрѣнію, распространенному у насъ, я позволю себѣ привести мнѣніе, высказанное проф. Кульманномъ въ предисловіи къ его „Графической статикѣ."

Желая сдѣлать очеркъ трудамъ, выполненнымъ въ области графической статики въ разныхъ государствахъ, означенный профессоръ, швейцарскій нѣмецъ, говоритъ съ ироніей: „Въ Пруссіи прежде всего преобразовали названіе „графическая статика" въ „графостатика", но кромѣ этого сдѣлали очень мало. Тамошнимъ техникамъ не доставало до сихъ поръ необходимаго математическаго, а въ особенности *геометрическаго* образованія." Причину этого явленія Кульманнъ видитъ въ недостаточной подготовкѣ учителей математики въ прусскихъ реальныхъ училищахъ:... „Правда, Берлинъ имѣетъ въ настоящее время первый математическій факультетъ въ мірѣ, но онъ находится въ университетѣ, въ сторонѣ отъ строительной академіи, и готовитъ для реальныхъ гимназій, которыя *суть техническія заведенія,* учителей, ничего не смыслящихъ въ техникѣ" ..... „Слѣдовательно, тѣмъ учителямъ, которые должны образовывать будущихъ техниковъ, необходимо давать образованіе въ техническихъ заведеніяхъ, и въ этихъ заведеніяхъ, ради преуспѣянія техническаго образованія, должны подвизаться *наилучшія силы* изъ математическо-естественной области, которыми страна вообще располагаетъ."

Какъ извѣстно, порядки, на которые сѣтуетъ Кульманнъ, встрѣчаются не въ одной Пруссіи. Категорическое требованіе его, чтобы преподаватели математики въ реальныхъ школахъ подготовлялись къ своей должности не въ университетѣ, а непремѣнно въ высше-учебномъ техническомъ заведеніи, является—или можетъ казаться—одностороннимъ; но я надѣюсь, что каждый, хотя бы не раздѣляющій радикальнаго мнѣнія Кульманна, найдетъ скромнымъ мое требованіе, чтобы всѣ тѣ, кто готовится къ должности учителя математики въ реальныхъ училищахъ, заблаговременно позаботились о пополненіи пробѣловъ въ технической подготовкѣ своей.

Что университетъ не даетъ, или, если угодно, не можетъ дать полной подготовки молодому математику, желающему посвятить свою

дѣятельность преподаванію въ средне-учебныхъ заведеніяхъ, объ этомъ свидѣтельствуетъ самый фактъ открытія „курсовъ" въ Одессѣ. Въ своей замѣткѣ я хочу обратить вниманіе на одинъ важный пробѣлъ въ программѣ этихъ курсовъ. Вопросъ касается черченія.

Этотъ предметъ во многихъ учебныхъ заведеніяхъ является чѣмъ-то въ родѣ пасынка, такъ съ боку припеку.

По программѣ черченіе требуется; ну и прекрасно, черченіе будетъ и по росписанію. Но что подразумѣваютъ часто подъ этимъ словомъ, этого жалкій примѣръ видѣли мы не очень давно на столбцахъ „Педагогическаго сборника": Въ отвѣтъ на „дѣльную" критику, помѣщенную въ этомъ сборникѣ, авторъ солиднаго труда по черченію, г. Рябковъ, вынужденъ былъ въ „В. О. Ф." прочесть популярную лекцію, начинающуюся съ аза, и объяснить г. критику, что такое собственно черченіе*).

А между тѣмъ, для техника это предметъ первостепенной важности. Я и не думаю приводить здѣсь цитаты разныхъ знаменитостей, а прошу только всякаго, интересующагося этимъ вопросомъ, поговорить съ любымъ студентомъ-техникомъ; отъ него то онъ и узнаетъ, сколько времени тотъ долженъ просиживать за чертежной доской и какъ приходится тому студенту, который раньше, до поступленія въ высше-учебное заведеніе, не пріобрѣлъ достаточнаго умѣнія и навыка по черченію. Дѣло поставлено правильно только тогда, если въ высше-учебныя заведенія поступаютъ молодые люди, уже вполнѣ знакомые съ этимъ искусствомъ; задача высше-учебнаго заведенія должна заключаться въ приложеніи этого искусства, а не въ обученіи ему.

Програма реальныхъ училищъ обставлена такъ, что при правильной постановкѣ дѣла ученики вполнѣ могутъ подготовиться по черченію. Но правильно ли поставлено дѣло черченія, вотъ вопросъ!

Учебные планы по прежней программѣ реальныхъ училищъ высказывали *желаніе*, чтобы геометрія и черченіе находились въ рукахъ одного и того же преподавателя; по программамъ же настоящаго времени это прямо требуется. Теперь готовится опять нѣкоторая перемѣна въ программѣ и въ этомъ проектѣ прямо такъ и помѣщаются въ одной строкѣ: геометрія и геометрическое черченіе.

Такимъ образомъ черченіе должно непремѣнно находиться въ рукахъ преподавателя математики.

Курсъ черченія начинается съ 3-го класса, гдѣ ученики обучаются такъ наз. техническому черченію. Въ этомъ классѣ черченіе не имѣетъ связи съ математикой больше, чѣмъ напр. рисованіе, и поэтому можетъ быть поручено и не математику. Въ одинъ годъ, при опытномъ и понимающемъ свое дѣло преподавателѣ, большинство учениковъ могутъ ознакомиться съ простѣйшими пріемами черченія, но заблужденіемъ было бы предполагать, что въ этотъ одинъ годъ искусство можетъ быть настолько разучено, что впослѣдствіи, когда подъ руководствомъ учителя математики приходится вычерчивать геометрическія задачи на

*) „Вѣстникъ Оп. Физики" № 163, 165 стр. 184, 194.

построеніе, ученики будутъ обладать уже достаточной технической подготовкой и что учитель-математикъ можетъ пробиться и безъ знанія черченія! Не говоря о томъ, что многіе ученики въ продолженіи одного года (въ 3-мъ классѣ) не успѣваютъ достаточно освоиться съ пріемами, каждый истинный чертежникъ долженъ признать, что техническое черченіе и геометрическое черченіе суть двѣ разныя статьи и что поэтому и ученики, свѣдущіе въ техническомъ черченіи, постоянно нуждаются въ новыхъ и новыхъ указаніяхъ (хотя бы взять вычерчиваніе кривыхъ въ 6-мъ, и проэкціонное черченіе въ 7-мъ классахъ).

Какъ же тутъ быть съ черченіемъ?

Въ настоящее время, если въ корпораціи учителей нѣтъ математика, пріобрѣвшаго техническое образованіе, остается или предоставить черченіе личному вкусу и умѣнію учениковъ, или же уроки черченія замѣнять математикой подъ фирмой рѣшенія задачъ на построеніе; но въ послѣднемъ случаѣ выполняется то, что и въ классическихъ гимназіяхъ, такъ что черченія, въ смыслѣ особаго предмета, въ смыслѣ графическаго искусства вовсе нѣтъ и такимъ образомъ то, что требуется программой, не выполняется. Еще хорошо, если такой преподаватель, сознавая свою несостоятельность въ этомъ предметѣ, сидитъ себѣ скромно и не ухудшаетъ положенія дѣла разными совѣтами. Мнѣ самому приходилось выслушивать прекурьезныя мнѣнія, между прочимъ и такое, что, молъ, чертежная бумага передъ наклеиваніемъ на доску не должна быть смачиваема, потому что иначе въ зданіи заводится сырость!!

Прежде вопросъ о преподаваніи черченія еще не былъ въ такой степени жгучимъ, какъ теперь. Въ программу реальныхъ училищъ входили „практическіе“ предметы въ родѣ механики, строительнаго искусства и т. п. и представителями этихъ предметовъ были отчасти лица, окончившія высшія техническія заведенія, отчасти же кандидаты математическихъ наукъ, получившіе еще техническую подготовку въ Имп. Московскомъ Технич. Училищѣ. Имъ-то и могло быть поручаемо черченіе, или же можно было поручить этотъ предметъ свѣдущему учителю рисованія, если послѣдній обладалъ необходимыми техническими познаніями. Теперь совсѣмъ не то. Теперь геометрія и черченіе *должны* находиться въ рукахъ одного преподавателя, т. е. учитель математики долженъ знать черченіе. И это совершенно правильно.

Естественно, что на первомъ планѣ университетъ, разъ ему предоставлено исключительное право образовывать учителей математики, долженъ былъ бы позаботиться о всесторонней подготовкѣ ихъ, между прочимъ, обучить ихъ черченію. Это принесло бы громадную пользу и тѣмъ изъ преподавателей, которымъ и не придется читать въ реальныхъ училищахъ.

Для обученія черченію имѣется въ университетѣ полнѣйшая возможность; тамъ вѣдь проходится Начертательная Геометрія; но къ сожалѣнію ее только читаютъ, а выполненіе чертежей предоставляется личному усмотрѣнію и усердію студентовъ. Это тоже пасынокъ, пасынокъ математическаго факультета. А результатъ? — Правильно выражается тотъ же Кульманнъ: „Никогда не могъ бы возникнуть въ Берлинѣ *Кремона*, который, стоя высоко на математической лѣстницѣ, что нибудь да представляетъ собою; и на практическомъ поприщѣ ни-

когда математикъ, получившій образованіе въ университетѣ, не будетъ строить многоугольника силъ; вѣдь все графическое исключено принципіально изъ университета"....

Такимъ образомъ, разъ черченіе не нашло себѣ пріюта въ университетѣ,*) то на „педагогическихъ курсахъ", задавшихся пополненіемъ пробѣловъ въ подготовкѣ будущихъ преподавателей математики, изученіе черченія должно играть не послѣднюю роль. Иначе ни университетъ, ни „курсы" не выполнятъ своей задачи, на сколько это касается подготовки учителей математики, по крайней мѣрѣ для реальныхъ училищъ.

Въ программу „курсовъ" входитъ, правда, и посѣщеніе уроковъ; но если при этомъ имѣлось въ виду и черченіе (я въ этомъ сомнѣваюсь), то можно навѣрно сказать, что посѣщеніемъ уроковъ черченія, хотя бы очень частымъ, горю не будетъ пособлено; тутъ нужно не наблюдать а самому сѣсть за чертежный столъ и взяться за наугольникъ, треугольникъ и готовальню. Изученіе искусства однимъ только наблюденіемъ походило бы на изученіе поваренпаго искусства по книгѣ, безъ практики; такимъ путемъ борщу не сваришь.

Полагаю, что необходимость принятія черченія въ программу „педагогическихъ курсовъ" доказана мною вполнѣ. Только расширивъ такимъ образомъ свою программу, курсы могутъ выполнить цѣль, ради которой устроены.

Ф. Коваржикъ (Полтава).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новая перемѣнная звѣзда, по всей вѣроятности принадлежащая къ типу Алголя, открыта C. Ray Woods'омъ въ Капштадтской обсерваторіи при помощи фотографіи. На снимкахъ 16 февр. 1893 г. и 20 янв. 1894 г. она является звѣздой 9-й величины или слабѣе, на другомъ рядѣ снимковъ 8-й величины. При сравненіи новыхъ снимковъ оказалось, что періодъ измѣненія свѣта для этой звѣзды равенъ 5 суткамъ 22 час. 19 мин. $\pm$ 6 мин. Прямое восхожденіе $= 9^h\ 28{,}5^m$; склоненіе $= -44^0\ 39'$.

В. Г.

Необычайное явленіе наблюдалось утромъ 20 декабря (н. с.) 1893 г. въ Сѣверной и Южной Каролинѣ и Виргиніи. Большое свѣтящееся тѣло блестящаго бѣлаго цвѣта двигалось съ запада на востокъ по южной сторонѣ небеснаго свода. Достигнувъ точки, удаленной приблизительно на 15^0 отъ восточнаго горизонта, оно повидимому остановилось и *оставалось на мѣстѣ 15—20 минутъ*, а затѣмъ распалось на части, такъ что цѣлый дождь звѣздъ посыпался къ горизонту, недалеко отъ

*) Въ Новороссійскомъ Университетѣ постоянно преподается черченіе въ качествѣ необязательнаго предмета, такъ что студенты, желающіе пройти черченіе, имѣютъ полную къ тому возможность. *Ред.*

того мѣста, гдѣ восходило солнце. При движеніи метеора слышался шумъ, и на всемъ его пути минутъ 30 оставался хвостъ плотныхъ паровъ, которые были видимы даже послѣ восхода солнца. Явленіе это имѣло мѣсто въ 7-мъ часу утра по мѣстному времени. (L'Astr.).

В. Г.

Измѣреніе температуры въ глубокихъ слояхъ земли.—William Hallock сдѣлалъ въ геологической секціи Американской Ассоціаціи для соспѣшествованія наукамъ весьма интересное сообщеніе объ измѣреніи температуры въ колодцѣ въ Weeling'ѣ (въ западной Виргиніи). Колодецъ этотъ имѣетъ глубину въ 1500 метровъ и представляетъ большое преимущество предъ колодцами въ Шперенбергѣ (1390 метровъ и Шладебахѣ (1910 метр.) въ томъ отношеніи, что не содержитъ воды, которая, благодаря своимъ движеніямъ вслѣдствіе неравномѣрнаго нагрѣванія, весьма затрудняетъ точное измѣреніе температуры. Въ Weeling'ѣ на глубинѣ 430 метр. температура оказалась равной $20^0,4$, на глубинѣ 1487 метр.—$43^0,4$. Въ верхнихъ слояхъ температура возрастаетъ медленнѣе — приблизительно по $0,5^0$ на каждые 27 — 30 метровъ, — чѣмъ въ самыхъ нижнихъ, гдѣ температура увеличивается на $0,5^0$ на каждые 20 метровъ. *В. Г.*

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Для **опредѣленія удѣльнаго вѣса** небольшихъ тѣлъ (минераловъ, солей и т. п.) служатъ очень удобнымъ средствомъ тяжелыя жидкости, удѣльный вѣсъ которыхъ точно извѣстенъ. Данное тѣло опускается по очереди въ различныя жидкости, причемъ замѣчается, въ который оно не тонетъ и не плаваетъ; удѣльный вѣсъ этой жидкости и будетъ удѣльнымъ вѣсомъ испытуемаго тѣла. Употребляемыя для этого жидкости должны быть прозрачны и легкоподвижны, а также не должны растворятъ даннаго тѣла.

До сихъ поръ употреблялись слѣдующія жидкости: метиленъіодидъ (CH_2J_2, s=3,3), бромаль (CBr_3COH, s=3,34), кремнистый іодоформъ ($SiHJ_3$, s=3,4). *J. Retgers* предлагаетъ еще слѣдующія: 1) насыщенный растворъ іодистаго мышьяка (AsJ_3) и іодистой сурьмы (SbJ_3) въ смѣси бромистаго мышьяка и іодистаго метилена (s=3,70 при 20^0); 2) Насыщенный растворъ іодистаго олова (SnJ_4) въ бромистомъ мышьякѣ ($AsBr_3$) (при 15^0 s=3,73); 3) Насыщенный растворъ селена въ бромистомъ селенѣ (SeBr) (s=3,7); 4) Іодаль (CJ_3COH, s=3,7—3,8). Интересно, что болѣе тяжелыхъ жидкостей получить не удалось. (Zeitschr. f. physik. Chem. 11. p. 328. 1893).

Бхм. (Софія).

Термометры съ толуоломъ.—Въ послѣднее время для наполненія термометровъ стали употреблять толуолъ. Вещество это, благодаря своей низкой температурѣ замерзанія (—50^0C) и высокой температурѣ кипѣнія (+ 150^0C), небольшому удѣльному вѣсу (0,89), а также легкости

полученія въ чистомъ видѣ представляетъ нѣкоторыя преимущества передъ спиртомъ. Такіе термометры употребляются теперь между прочимъ въ Bureau international des poids et mesures. Для приведенія показаній термометра съ толуоломъ къ показаніямъ водороднаго термометра составлены особыя таблицы. *В. Г.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Математическій конгрессъ въ Чикаго имѣлъ мѣсто во время всемірной выставки, съ 21 по 26 авг. прошлаго года. Особый интересъ придало конгрессу присутствіе на немъ проф. Феликса Клейна, делегата Германіи, передавшаго конгрессу привѣтствіе германскаго правительства и значительное число мемуаровъ германскихъ ученыхъ. Число этихъ мемуаровъ составляло болѣе половины общаго числа сообщеній, сдѣланныхъ на конгрессѣ. Проф. Клейнъ былъ выбранъ почетнымъ президентомъ конгресса. Въ свой вступительной рѣчи Клейнъ остановился на общей характеристикѣ развитія математики XIX столѣтія. „Великіе ученые предыдущаго періода: Лагранжъ, Лапласъ, Гауссъ обнимали всѣ вѣтви математики и ея приложеній. Появившееся въ XIX столѣтіи стремленіе къ спеціализаціи имѣло слѣдствіемъ уменьшеніе интереса къ математикѣ въ научномъ мірѣ. Но въ послѣднія два десятилѣтія появилось снова стремленіе къ объединенію разрозненныхъ математическихъ доктринъ. Благодаря понятію о группѣ, геометрія и теорія чиселъ, которыя въ теченіе долгаго періода времени представлялись прямо противоположными по своимъ стремленіямъ и методамъ, могутъ быть во многихъ случаяхъ разсматриваемы какъ двѣ различныя стороны одной и той же доктрины. Это объединяющее стремленіе проявляется и въ приложеніяхъ математической науки“. Приведя нѣсколько примѣровъ этого стремленія къ объединенію, проф. Клейнъ закончилъ свою рѣчь указаніемъ на то, что „направленіе, проявляющееся теперь въ математикѣ, есть возвращеніе къ общей программѣ Гаусса“ и выразилъ надежду, что конгрессъ въ Чикаго будетъ однимъ изъ шаговъ къ необходимому для успѣшнаго выполненія этой программы общенію между математиками всѣхъ странъ.

Изъ Россіи было прислано одно сообщеніе—„О повѣркѣ ариѳметическихъ операцій надъ большими числами“—свящ. І. М. Первушина.

По окончаніи конгресса проф. Клейнъ прочелъ рядъ лекцій въ Сѣверо-западномъ университетѣ въ Эванстонѣ. Лекціи эти изданы проф. Зиветомъ подъ заглавіемъ „The Evanston Colloquium. Lectures on mathematics“. (Изв. Физ. Мат. Общ. при Каз. Унив.).

Такъ какъ **подписка на капиталъ имени Лобачевскаго** идетъ довольно оживленно, то Распорядительный Комитетъ надѣется, что, помимо учрежденія преміи имени Лобачевскаго, возможно будетъ еще поставить бюстъ его въ саду, носящемъ его имя и находящемся противъ Казанскаго университета.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Алгебра и собраніе алгебраическихъ задачъ. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ *П. Никульцевъ*, инспектирующій учитель Александровскаго Смоленскаго реальнаго училища. Часть первая. Теоретическій отдѣлъ съ приложеніемъ курса дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Изданіе третье (съ измѣненіями). Москва. 1894. Ц. 1 р. 25 к.

Stern-Ephemeriden auf das Jahr 1894 zur Bestimmung von Zeit und Azimut mittelst des tragbaren Durchgangsinstruments im Verticale des Polarsterns. Von *W. Döllen*. Dorpat. 1893.

Programme des conditions d'admission à l'Ecole des Hautes Etudes Commerciales. Paris. 1894.

Отчетъ о дѣятельности Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ за третій годъ его существованія. Казань. 1894 г.

ЗАДАЧИ.

№ 56. Показать, что если

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sn}x.\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}z,$$

то

$$(\mathrm{tg}\,{}^1/_2 x)^2 = \mathrm{tg}\,{}^1/_2 z,$$

при $0 < x < {}^{\pi}/_2$.

В. Каганъ (Одесса).

№ 57. Показать, что

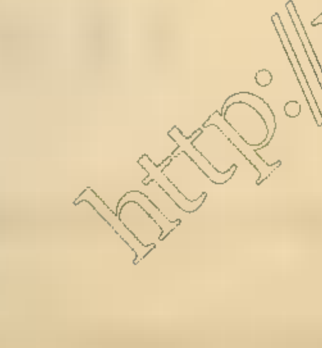
$$e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3....n},$$

гдѣ n есть цѣлое число, а e основаніе неперовыхъ логориѳмовъ.

А. Варенцовъ (Ростовъ н. Д.).

№ 58. Составить квадратъ

a	b	c
a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2



такъ, чтобы:

$$a+b+c=a+a_1+a_2=c+b_1+a_2=pn$$
$$a_1+b_1+c_1=b+b_1+b_2=qn$$
$$a_2+b_2+c_2=c+c_1+c_2=a+b_1+c_2=rn.$$

И. Износковъ (Казань).

№ 59. Составить квадратъ

α	β	γ
α_1	β_1	γ_1
α_2	β_2	γ_2

въ которомъ

$$\alpha\beta\gamma=\alpha\alpha_1\alpha_2=\alpha_2\beta_1\gamma=n^p,$$
$$\alpha_1\beta_1\gamma_1=\beta\beta_1\beta_2=n^q,$$
$$\alpha_2\beta_2\gamma_2=\gamma\gamma_1\gamma_2=\alpha\beta_1\gamma_2=n^r.$$

И. Износковъ (Казань).

№ 60. Построить треугольникъ ABC по двумъ даннымъ сторонамъ его AB и AC, если извѣстно, что средины сторонъ AB и AC и средины прилежащихъ къ вершинамъ B и C отрѣзковъ высотъ, опущенныхъ изъ этихъ вершинъ на противолежащія стороны, суть вершины квадрата.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 61. Показать, что если

$$a(a-1)=b(b^{n+3}+2),$$

то выраженіе

$$a^{2n+1}+b^{n+4}+b^{n+1}$$

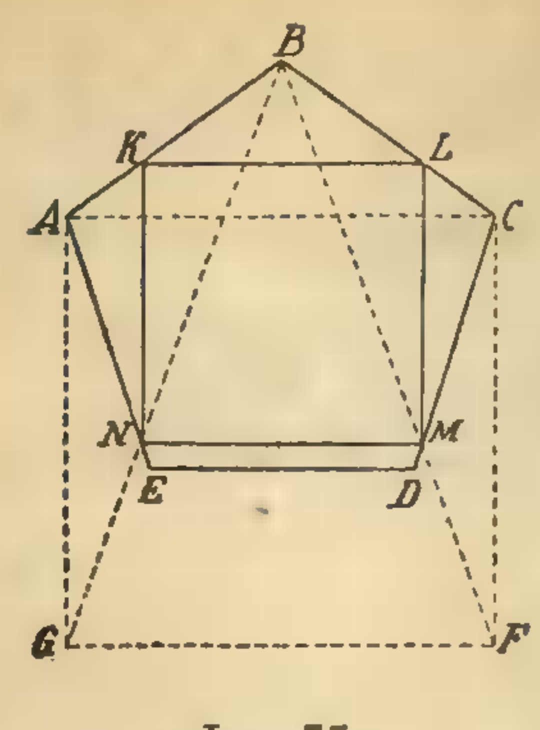
дѣлится на a^2-b безъ остатка.

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 558 (2 сер.). Вписать квадратъ въ данный правильный пятиугольникъ.

Соединивъ вершины A и C (фиг. 77) даннаго правильнаго пятиугольника $ABCDE$, на прямой AC строимъ квадратъ $ACFG$. Точ-



Фиг. 77.

ки N и M пересѣченія прямыхъ BG и BF со сторонами AE и CD пятиугольника суть двѣ вершины вписаннаго въ данный пятиугольникъ квадрата $MNKL$, ибо

$$\frac{KL}{AC}=\frac{BL}{BC}=\frac{LM}{CF}=\frac{BM}{BF}=\frac{MN}{GF},$$

а такъ какъ $AC=CF=GF$ по построенію, то

$$KL=LM=MN.$$

В. Ушаковъ (ст. Усть-Медвѣдицкая); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *З. Триѳоновъ* (Симбирскъ).

№ 568 (2 сер.). У меня въ лѣсу 813 деревьевъ: дубы, липы, березы и сосны. Если трое примутся рубить дубы, то двое успѣютъ срубить въ то же время липы, и если пятеро возьмутся рубить липы, то чтобы срубить въ то-же время всѣ березы понадобятся шесть человѣкъ; наконецъ, если бы семеро стали рубить березы, то одинъ успѣлъ бы срубить за то же время всѣ сосны. Сколько въ моемъ лѣсу дубовъ, липъ, березъ и сосенъ?—Предполагается, что всѣ рабочіе одинаковой силы и что для срубки каждаго дерева требуется одно и то же время.

NB. Рѣшить задачу ариѳметически, не прибѣгая къ отношеніямъ и пропорціямъ.

Если бы въ лѣсу была одна сосна, то березъ было бы 7, если бы было 6 сосенъ, то березъ было бы 7×6, а липъ 7×5, если бы, наконецъ, сосенъ было 6×2, то березъ было бы $7\times 6\times 2$, липъ $7\times 5\times 2$, а дубовъ $7\times 5\times 3$. Всего же деревъ въ лѣсу было бы тогда

$$6\times 2+7\times 6\times 2+7\times 5\times 2+7\times 5\times 3=271,$$

а такъ какъ $813:271=3$, то сосенъ въ лѣсу $6\times 2\times 3=36$, березъ $7\times 6\times 2\times 3=252$, липъ $7\times 5\times 2\times 3=210$, дубовъ $7\times 5\times 3\times 3=315$.

А. Дмитріевскій (Цивильскъ); *А. Филатовъ* (с. Знаменка).

№ 576 (2 сер.). Показать, что всякое цѣлое число, представляющее сумму трехъ квадратовъ, можетъ быть представлено въ видѣ суммы квадратовъ четырехъ дробей. (Теорема Bachwitz'а).

Пусть $N=A^2+B^2+C^2$. Умноживъ N на сумму другихъ трехъ квадратовъ, получимъ

$$(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+c^2)=(Aa+Bb+Cc)^2+(Ab-Ba)^2+$$
$$+(Bc-Cb)^2+(Ca-Ac)^2,$$

откуда

$$A^2+B^2+C^2=\frac{(Aa+Bb+Cc)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(Ab-Ba)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(Bc-Cb)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(Ca-Ac)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Если положимъ:

$$a=x^2+y^2-z^2,\ b=2xz,\ c=2yz,$$

то получимъ

$$A^2+B^2+C^2=\left[\frac{Aa+Bb+Cc}{x^2+y^2+z^2}\right]^2+\left[\frac{Ab-Ba}{x^2+y^2+z^2}\right]^2+\left[\frac{Bc-Cb}{x^2+y^2+z^2}\right]^2+\left[\frac{Ca-Ac}{x^2+y^2+z^2}\right].$$

Г. Легошинъ (с. Знаменка); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 588 (2 сер.). Показать, что сумма квадратовъ сторонъ треугольника относится къ суммѣ квадратовъ его медіанъ, какъ 4:3.

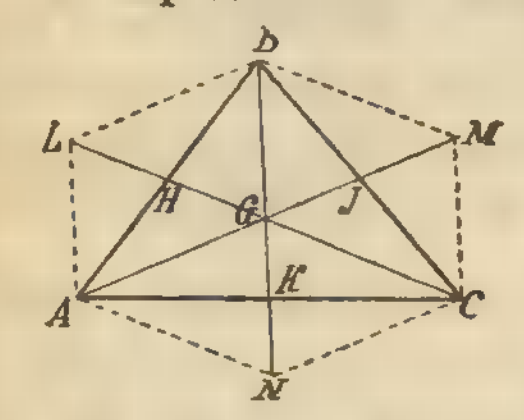
1. Пусть a, b, c стороны треугольника, m_a, m_b, m_c ихъ медіаны. Имѣемъ

$$a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2},$$
$$a^2+c^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2},$$
$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2},$$

Умножая эти равенства на 2 и складывая, получимъ

$$3(a^2+b^2+c^2)=4(m_a^2+m_b^2+m_c^2) \text{ или } \frac{a^2+b^2+c^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}=4/3.$$

2. Продоливъ каждую изъ медіанъ треугольника ABC (фиг. 78), отложивъ на продолженіяхъ отрѣзки $LH=HG$, $MJ=JG$, $NK=KG$ и соединивъ точки L, M, N съ вершинами треугольника ABC, получимъ изъ парллелограмма $ALBG$:



Фиг. 78.

$\overline{AB}^2+\overline{LG}^2=2\overline{BG}^2+2\overline{AG}^2$ или $\overline{AB}^2=8/9\,\overline{BK}^2+8/9\,\overline{AJ}^2-4/9\,\overline{CH}^2$

аналогично $\overline{BC}^2=8/9\,\overline{BK}^2+8/9\,\overline{CH}^2-4/9\,\overline{AJ}^2$

и $\overline{CA}^2=8/9\,\overline{AJ}^2+8/9\,\overline{CH}^2-4/9\,\overline{BK}^2$

Складывая эти равенства, получимъ требуемое соотношеніе.

П. Бѣловъ (с. Знаменка); *В. Ушаковъ* (ст. Усть-Медвѣдицкая); *К. Межинскій* (Симбирскъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *П. Ивановъ* (Одесса); *С. Окуличъ* (Варшава); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *Н. Кузнецовъ*, *А. Треумовъ* (Ив.-Вознес.).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Бабиной* (Муромъ)—№ 36 (3 сер.); *М. Веккера* (Винница) — № 50 (3 сер.); *М. Семихова* (Полтава)—№№ 3, 25, 27, 28, 34 (3 сер.); *О. Риваша* (Вильна)—№№ 2, 8, 9, 10, 19, 25, 27, 28, 31 (3 сер.); *А. Петрова* (Красноярскъ)— № 1 (3 сер.); *А. Варенцова* (Рост. н. Д.)—№ 381 (2 сер.) и №№ 13, 37, 38, 40, 41 (3 сер.); *Я. Блюмберга* (Рига)—№№ 27, 28, 29, 31, 39 (3 сер.); *Ю. Идельсона* (Винница)—№№ 23, 27 (3 сер.); *С. Петрашкевича* (Скопинъ)—№№ 1, 3, 5, 6 (3 сер.); *С. Адамовича* (с. Спасское)—№ 418 (2 сер.); *И. Радашевича* (Выборгъ)—№ 41 (3 сер.); *Р. Хмѣлевскаго* (Полтава)—№ 567 (2 сер.).

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 30-го Апрѣля 1894 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

ГОДЪ XII. **ПОДПИСКА НА 1894 ГОДЪ.** ГОДЪ XII.

РЕБУСЪ

ЕЖЕНЕДѢЛЬНЫЙ ЖУРНАЛЪ.

Вступая въ двѣнадцатый годъ своего существованія, журналъ сохранитъ прежнее направленіе, хорошо извѣстное нашимъ читателямъ. Для желающихъ же ознакомиться съ нимъ мы скажемъ нѣсколько словъ о нашей одиннадцатилѣтней дѣятельности. Въ дни основанія нашего журнала не только русская, но и иностранная пресса, исключая спеціальной, не говорила почти ни слова о самой важнѣйшей области человѣческаго знанія: о психическихъ, сверхчувственныхъ явленіяхъ. Мы отвели обширное мѣсто въ журналѣ обзору фактовъ и наблюденій въ этой области. Помѣщенныя нами статьи о **гипнотизмѣ, магнитизмѣ, ясновидѣніи и медіумизмѣ** (спиритизмѣ) даютъ полную картину своевременнаго взгляда на эти таинственныя явленія. Журналъ нашъ единственный изъ всей русской прессы шагъ за шагомъ слѣдилъ за энергическою дѣятельностью „Лондонскаго Общества для психическихъ изслѣдованій", руководимаго извѣстными англійскими учеными. Мы заимствовали изъ его „Трудовъ" статьи о передачѣ мысли на разстояніи (телепатія), описанія тщательно провѣренныхъ членами Общества случаевъ явленія призраковъ: прижизненныхъ, присмертныхъ и посмертныхъ. Статьи извѣстныхъ дѣятелей и ученыхъ по всѣмъ вопросамъ этой мало еще изслѣдованной области тоже нашли мѣсто въ нашемъ журналѣ, хотя нѣкоторыя изъ нихъ и противорѣчатъ нашимъ взглядамъ, какъ, напримѣръ, сочиненіе извѣстнаго нѣмецкаго философа Эд. Гартмана —„Спиритизмъ", стремящееся нанести спиритизму смертельный ударъ.

Существующая уже нынѣ обширная литература неопровержимо свидѣльствуетъ, что интересъ къ психизму все болѣе и болѣе растетъ; факты и наблюденія въ этой области накопляются съ поразительною быстротой и даютъ намъ богатый матеріалъ для нашей дальнѣйшей дѣятельности.

Въ **беллетристическомъ отдѣлѣ** помѣщаются романы, повѣсти и расказы, а подъ рубрикою **смѣсь** извѣстія о новѣйшихъ открытіяхъ и изобрѣтеніяхъ, а также выдающіяся событія ежедневной жизни.

Цѣна на годъ 5 р., на полгода 3 р. съ дост., а безъ дост. 4 р. и 2 р. 50 к. Допускается разсрочка: при подпискѣ 2 р., 1 апрѣля, 1 іюля и 1 октября по 1 р. Подписка принимается въ С.-Петербургѣ, въ конторѣ редакціи (книж. магаз. Мартынова, —Невскій, 46); въ книж. магаз. Вольфа, Мелье, „Новаго Времени", и др. **Чрезъ почту** деньги высылаются по адресу: С.-Петербургъ, въ редакцію журнала „**Ребусъ**".

Можно получить журналъ 1884—1889 гг. по 3 руб. за годъ, 1890 г.—4 руб., 1891 и 1892 г.—по 5 руб. за годъ.

Въ этихъ годахъ, между прочимъ, помѣщено: Первые опыты проф. Барретта и Бальфура надъ сверхчувственной передачей мысли. Изъ отчетовъ **Лондонскаго Общества для психическихъ изслѣдованій**—установленіе фактовъ: передачи мысли на разстояніи (телепатія), автоматическаго письма, правдивыхъ галлюцинацій—„Призраковъ живыхъ". **Ф. Майересъ**—Посмертные призраки. **Изъ отчетовъ парижскаго Общества физіол. психологіи: Жане**—Раздвоеніе личности въ сомнамбулизмѣ. **Охоровичъ**—Мысленное внушеніе. **Рише**—Вызываніе сомнамбулизма на разстояніи. Гипнотизмъ въ примѣненіи къ леченію и къ изученію спиритическихъ явленій. Гипнотизмъ въ связи съ вопросомъ о сущности матеріи. Медіумическіе сеансы за границей и у насъ: въ Петербургѣ, Москвѣ, Калугѣ, Ташкентѣ, Одессѣ, Саратовѣ, Владимірѣ, Казани, Севастополѣ, Проскуровѣ, Харьковѣ, Черниговѣ, Вологдѣ, Курскѣ, Ромнахъ, Вильнѣ и др. **Бутлеровъ**—Кое-что о медіумизмѣ. Рѣчь въ Одессѣ о необходимости изученія медіумическихъ явленіяхъ Э. Гартманъ полный переводъ его сочиненій „Спиритизмъ", направленнаго противъ спиритической теоріи. **Круксъ**—Замѣтки о его сеансахъ съ Юмомъ. **А. Аксаковъ**—Критика гипотезъ „галлюцинаціи" и „безсознательнаго", какъ рѣшающихъ проблему медіумическихъ явленій (отвѣтъ Гартману). Изъ личнаго опыта: зрѣніе безъ органовъ зрѣнія. Фотографіи медіума и фигуры, полученныя мною на сеансѣ въ Лондонѣ. Спиритическія явленія въ русской крестьянской избѣ. **Вагнеръ**—Фотографія

невидимой руки. Взглядъ физiологiи и психологiи на явленiя гипнотизма. **Шопенгауеръ** — О духовидѣнiи. **Дю-Прель**—Душа, какъ организующее начало. Психическая причина порожденiя двойниковъ. Феноменологiя спиритизма. **Отчетъ лондонскаго Общества** о движенiи предметовъ безъ прикосновенiя къ нимъ. Наблюденiя надъ условiями для полученiя медiумическихъ явленiй. Признанiе професс. **Ламброзо** реальности медiумическихъ явленiй и его опыты. **А. Р. Уалласъ**--Духовный Дарвинизмъ. **Поль Жибье**—Трансцендентальная физiологiя, какъ наука будущаго. **Шарко**—О сомнабулизмѣ. Международные конгрессы въ Парижѣ: спиритическiй и магнетическiй. Проф. Остроградскiй, какъ спиритуалистъ. Сеансы Энглинтона въ Петербургѣ съ проф. Доброславинымъ и Пашутинымъ. **В. Прибытковъ**—Медiумическiя явленiя безъ содѣйствiя такъ называемыхъ духовъ. Иной мiръ или четырехмѣрное пространство. **Гейнце**—Какъ я сдѣлался спиритомъ? **Барабашъ**—Спиритизмъ и эволюцiонизмъ. Медiумизмъ и наука.—Критическiй очеркъ явленiй въ „непокойныхъ домахъ". Присяжный фокусникъ на сеансахъ въ Проскуровѣ. Безпримѣрный случай изъ современной жизни. **Профес. Ламброзо**—Спиритизмъ и психiатрiя.—Многократное видѣнiе посмертнаго призрака въ Россiи. Поразительный случай нахожденiя пропавшихъ вещей медiумическимъ путемъ въ Россiи. Видѣнiя и ихъ научное объясненiе. Магнетизмъ и гипнотизмъ въ примѣненiи ихъ къ леченiю болѣзней (изъ отчетовъ международныхъ конгрессовъ). Обзоръ десятилѣтней дѣятельности журнала. **Д-ръ Бразоль**.—Положенiе гомеопатiи среди опытныхъ наукъ. **Крестъ надъ глетчеромъ**—романъ извѣстнаго нѣмецкаго философа **Дю-Преля**, въ которомъ онъ талантливо затрогиваетъ всѣ современные вопросы психизма.

3—3 Редакторъ-издатель **В. Прибытковъ**.

ТОЛЬКО ЧТО ОТПЕЧАТАНО

ПЯТОЕ, ЗНАЧИТЕЛЬНО ДОПОЛНЕННОЕ, ИЗДАНIЕ

(35-я тысяча экземпляровъ)

СБОРНИКА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

В. П. МИНИНА

съ приложенiемъ большого числа задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненiемъ геометрiи и тригонометрiи.

(VII + 204 стр. и 151 черт. въ текстѣ).

1894 г. Цѣна 90 коп.

Изданiе книжнаго магазина В. В. Думнова, подъ фирмою „насл. бр. Салаевыхъ". (Москва, Мясницкая, д. Обидиной). 4—4

Редакцiя „Вѣстника Оп. Физики" проситъ г.г. рѣшающихъ и предлагающихъ задачи присылать рѣшенiя напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" задачъ на отдѣльныхъ листкахъ, **не соединяя ихъ съ предлагаемыми для рѣшенiя задачами**. Лица, предлагающiя задачи, приглашаются присылать вмѣстѣ и краткiя ихъ рѣшенiя.

Редакцiя „Вѣстника Оп. Физики" проситъ своихъ сотрудниковъ дѣлать чертежи къ статьямъ возможно тщательно **на отдѣльныхъ бумажкахъ**, а не въ текстѣ рукописи и отмѣчать желаемое число отдѣльныхъ оттисковъ **на самой статьѣ**.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

L'ASTRONOMIE

№ 4.—1894.

Les grands instruments de l'avenir. *C. Flammarion.* До послѣдняго времени наибольшая зрительная труба была въ обсерваторіи Lick'а на горѣ Hamilton въ Калифорніи; діаметръ объектива = 36 дюйм.; нѣсколько меньше были трубы въ Пулковѣ и Ниццѣ (по 30 дюйм. обѣ). Въ настоящее время наибольшая труба, фигурировавшая на выставкѣ въ Чикаго, будетъ помѣщена въ новой обсерваторіи вблизи Чикаго; ея объективъ=40 дюйм., длина трубы съ окуляромъ=20 м.; изготовлена она на средства американскаго богача Jerkes'а; стекла изготовлены въ Парижѣ (Feil и Mantois) и отшлифованы въ Кэмбриджѣ - американскомъ (Alvan Clark). Можно ли устроить трубу еще сильнѣе? Первая трудность состоитъ въ томъ, чтобы приготовить два большихъ куска стекла, совершенно чистыхъ и прозрачныхъ. Когда эта операція удастся, нужно этимъ кускамъ придать строго-геометрическую форму и исправить ее по указанію опыта такъ, чтобы стекла давали изображеніе совершенно отчетливое. Операціи, нужныя для этого, производятся отъ руки и требуютъ по нѣскольку мѣсяцевъ на каждую поверхность объектива. По мнѣнію лучшихъ современныхъ оптиковъ (Mantois, Alvan Clark) возможно построить трубы болѣе сильныя — для этого требуются время и деньги.

Constitution physique du soleil. Nouvelles recherches. *E. R. von Oppolzer.* Предметъ статьи—попытка вывести условіе равновѣсія солнечной атмосферы изъ законовъ газовъ и динамической теоріи тепла. Приложеніе этихъ законовъ въ данномъ случаѣ вполнѣ умѣстно, такъ какъ наблюденія и разныя соображенія заставляютъ думать, что въ слоѣ пятенъ и выше существуетъ крайне разрѣженный, совершенный газъ.

Представимъ себѣ на солнцѣ двѣ поверхности: N съ абсолютной температурой T и другую, глубже лежащую, N_0 съ темп. T_0. Если единица массы переносится адіабатически (т. е. не получая тепла извнѣ и не отдавая его) съ N на N_0, то происходитъ сжатіе и повышеніе температуры. Возможны три случая:

1) Если температура окружающей атмосферы возрастаетъ съ глубиною быстрѣе, чѣмъ адіабатическое нагрѣваніе взятой массы, то масса приходитъ на поверхность N_0 съ температурой болѣе низкой, чѣмъ окружающая. Такъ какъ восходящее движеніе въ подобной атмосферѣ сопровождается тоже охлажденіемъ, то мы получаемъ равновѣсіе неустойчивое.

2) Если темп. окружающей среды возрастаетъ съ глубиной медленнѣе, чѣмъ адіабатическое нагрѣваніе, то газъ, приходя въ нижніе слои, нагрѣвается — получается равновѣсіе устойчивое.

3) Если повышеніе темп. въ окружающей средѣ равно адіабатическому нагрѣванію данной массы, то получается равновѣсіе безразличное.

Какой-же изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто на солнцѣ? Если остановиться на послѣдней гипотезѣ и, принимая во вниманіе, что солнечная атмосфера состоитъ изъ водорода, вычислить температуру на поверхности фотосферы, то получимъ 5500000^0, что противорѣчитъ послѣднимъ наблюденіямъ, дающимъ цыфру гораздо ниже, не выше 100000^0. Поэтому слѣдуетъ заключить, что на самомъ дѣлѣ повышеніе температуры съ глубиной идетъ медленнѣе, чѣмъ въ опускающейся массѣ и что имѣетъ мѣсто 2-ой случай.

Какія-же причины способны произвести мѣстное охлажденіе атмосферы т. е. пятна? Такъ какъ всѣ спектральныя наблюденія приводятъ къ заключенію, что *надъ пятнами лежитъ слой болѣе теплый*, то сравнительно низкую темп. ихъ нельзя приписать восходящему потоку. Остается поэтому только одна причина—усиленное какими то мѣстными причинами лучеиспусканіе. *Мы должны считать пятна результатами усиленнаго лучеиспусканія внутреннихъ, глубоко лежащихъ слоевъ фотосферы.*

Какого-же происхожденія эти теплые слои, лежащіе надъ пятнами? Низшими слоями они не могутъ быть произведены Теплыми боковыми вѣтрами также не могутъ, ибо строеніе пятна заставляетъ предполагать его центральное происхожденіе. Остается одна причина—нисходящіе потоки изъ высшихъ слоевъ.

Эти потоки, какъ было указано выше, сопровождаются повышеніемъ температуры и слѣд. въ самихъ себѣ заключаютъ причину, стремящуюся сообщить имъ противуположное движеніе; поэтому на нѣкоторой глубинѣ должно установиться равновѣсіе и слѣд въ вещество пятна эти потоки проникнуть не могутъ. „Мы приходимъ къ заключенію, что пятна производятся *косвенно* паденіемъ матеріи на фотосферу, *непосредственно* чрезмѣрнымъ лучеиспусканіемъ, вызываемымъ прозрачностью среды выше лежащей".

Въ земной атмосферѣ происходитъ нѣчто подобное. Въ мѣстахъ высокаго давленія зимою господствуетъ сильный холодъ и земля бываетъ покрыта облаками. Но наблюденія на высокихъ горахъ показали, что холодъ распространяется на высоту сравнительно небольшую, выше температура выше и воздухъ чрезвычайно прозраченъ; тамъ, слѣд., имѣется нисходящій потокъ, являющійся объясненіемъ и прозрачности, и вызываемаго ею охлажденія низшихъ слоевъ и облаковъ. Эти мѣста наблюдателю, находящемуся внѣ земной атмосферы, показались-бы темными пятнами среди моря облаковъ. Высокое давленіе въ сосѣдствѣ солнечныхъ пятенъ доказано Spörer'омъ, показавшимъ, что потоки около нихъ имѣютъ видъ расходящійся.

Объясненіе образованія пятенъ нисходящими потоками проливаетъ нѣкоторый свѣтъ на ихъ распредѣленіе по широтѣ. Въ самомъ дѣлѣ нисходящему потоку долженъ соотвѣтствовать восходящій въ полярныхъ странахъ солнца, такъ какъ нисходящій имѣетъ мѣсто въ экваторіальныхъ. Съ усиленіемъ восходящаго потока усиливается нисходящій и пятна, увеличиваясь въ числѣ, подвигаются къ высшимъ широтамъ—это эпоха maximum'a; съ ослабленіемъ восходящаго потока ослабѣваетъ и нисходящій и небольшое число пятенъ остается только вблизи экватора. Видъ солнечной короны повидимому подтверждаетъ такой взглядъ, такъ какъ въ полярныхъ частяхъ въ эпоху усиленія солнечной дѣятельности замѣчается контуръ гористый. Въ предложенной теоріи главные вопросы физики солнца сводятся къ вопросу о періодическомъ повышеніи въ полярныхъ странахъ, для рѣшенія котораго нужны болѣе продолжительныя наблюденія, чѣмъ имѣющіяся въ настоящее время.

Rencontre d'une comète avec Jupiter. *W. W. Campbell.* Комета, открытая Brooks'омъ въ 1889 г., принадлежитъ къ періодическимъ съ семилѣтнимъ періодомъ; въ 1886 г. она прошла черезъ систему спутниковъ Юпитера, вслѣдствіе чего ея орбита сильно измѣнилась; вычисляя ея орбиту до этого момента, Chandler нашелъ, что періодъ ея былъ около 27 лѣтъ. Вычисленія показали, что она должна была проходить вблизи Юпитера въ 1779 г. Сравнивая ея орбиту *до* 1886 г. съ орбитой пропавшей кометы Лекселя послѣ 1779 г., т. е. времени, когда послѣдняя проходи*лг* вблизи Юпитера, Chandler считалъ весьма вѣроятнымъ тождество обѣихъ кометъ. Болѣе полное изслѣдованіе этого вопроса Poor'омъ въ послѣднее время показало, что вопросъ о тождествѣ не можетъ считаться рѣшеннымъ впредь до новаго ея появленія въ 1896 г.

La grande tache solaire de Février 1894. Статья содержитъ коллекцію рисунковъ и наблюденій, принадлежащихъ разнымъ астрономамъ.

L'aurore boréale du 28 Février 1894. Въ день исчезновенія большого пятна на зап. краѣ солнца въ Зап. Евр. было видимо сѣверное сіяніе отъ 7 до $9^1/_4$ ч. вечера. Приложенъ рядъ описаній этого явленія въ разныхъ городахъ Франціи.

La grande tache solaire du mois d'aout 1893. *J. M. Gonzalès.* Это громадное пятно съ діаметромъ въ $15^1/_2$ разъ больше земного достигло наибольшаго развитія 8 авг. Приложенъ рисунокъ и описаніе.

Société astronomique de France. Séance du 7 Mars.

Nouvelles de la science. Variétés.

К. Смоличъ (Умань).

ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

Н. Николаеву (Пенза).—Ваше рѣшеніе было получено.

Р. Хмѣлевскому (Полтава).—Насколько намъ извѣстно, спеціально математическаго нѣмецко-русскаго словаря вовсе не имѣется.

П. Хлѣбникову (Тула).—Всѣ Ваши письма мы получили и нѣкоторыми изъ предложенныхъ задачъ вѣроятно воспользуемся.